UNIVERSITÄT BAYREUTH
Mathematisches
Institut

Dr. Stephen Coughlan
Dr. Davide Frapporti

Zahlen, Polynome und grundlegende Techniken

1 Zahlen

- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Je nach Konvention beginnen sie bei 0 oder 1 (im Vorkurs bei 0).

  Giuseppe Peano entwickelte ein Axiomensystem, das die natürlichen Zahlen auf eindeutige Weise charakterisiert, aber leider haben wir hier nicht die Zeit, um alle Axiome zu erklären.

- **Ganze Zahlen:** Das **additive Inverse** eines Elementes $a \in \mathbb{N}$ ist das (eindeutige) Element, das die Eigenschaft $a + x = 0$ erfüllt, und wird mit $-a$ bezeichnet.

  Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ bestehen aus $\mathbb{N}$ und den *additiven Inversen* der Elemente von $\mathbb{N}$:
  $$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

- **Rationale Zahlen:** Das **multiplikative Inverse** eines Elementes $a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ ist das (eindeutige) Element, das die Eigenschaft $a \cdot x = 1$ erfüllt, und wird mit $\frac{1}{a}$ oder a^{-1} bezeichnet.

  Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ bestehen aus $\mathbb{Z}$, den *multiplikativen Inversen* der Elemente von $\mathbb{Z}$ und allen Kombinationen daraus.
  $$\mathbb{Q} := \{b \cdot \tfrac{1}{a} \mid b \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}.$$

  Die Darstellung ist *nicht* eindeutig, z.B. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{-8}{4} = -2$.

- **Reelle Zahlen:** Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ bestehen aus $\mathbb{Q}$ zusammen mit allen Elementen, die man braucht, damit jede nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke besitzt (Zahl die $\geq$ jedes Element der Menge ist), z.B. die Teilmenge
  $$M := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$
  hat in $\mathbb{Q}$ zwar obere Schranken (z.B. 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{29}{20}$), aber keine kleinste. Die kleinste obere Schranke ist tatsächlich $\sqrt{2}$ (die reell aber nicht rational ist, Satz von Euklid), d.h. eine positive reelle Zahl, deren Quadrat 2 ist.

2 Summen- und Produktzeichen

Seien m, n ganze Zahlen. Dann definiere das Summenzeichen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + \ldots + a_n.$$

Dabei nennt man i die **Laufvariable** (oder **Index**), m den **Startwert**, n den **Endwert** und a_i das **Argument** der Summe. Summiert wird *nur* über die ganzen Zahlen zwischen Start- und Endwert. Manchmal schreibt man die obige Summe auch

$$\sum_{m \leq i \leq n} a_i \quad \text{oder einfach} \quad \sum_i a_i \quad \text{(wenn Start- und Endwert klar sind).}$$

Falls der Startwert größer ist als der Endwert, definiert man die Summe als 0. Man spricht dann von einer **leeren Summe**.

Genauso definiere das Produktzeichen

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdots a_n\,.$$

Ein **leeres Produkt** ist 1.

Beispiel 2.1.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k = 2+3+4 = 9\,,\quad \sum_{j=3}^{6} 1 = 1+1+1+1 = 4\,,\quad \sum_{j=3}^{2} j^2 = 0.$

b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{3} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\,,\quad \prod_{i=-2}^{1} i^2 = 4\cdot 1\cdot 0\cdot 1 = 0\,,\quad \prod_{s=2}^{-1} s^3 = 1$

Für manche Umformungen ist eine **Indexverschiebung** nötig. Das ist einfach eine Substitution der Laufvariable:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \underset{j=i+k}{\overset{i=j-k}{=}} \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

Dies ist nur eine Änderung der Darstellung. Die einzelnen Summanden/Faktoren werden nicht verändert.

Beispiel 2.2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}(k-1) = \sum_{l=1}^{4} l\,,\quad \prod_{n=0}^{99}(n+1)^n = \prod_{n=1}^{100} n^{n-1}.$

Definition 2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **Fakultät** von n ist definiert als $n! := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Beispiel 2.4. $0! = 1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$.

Definition 2.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$. Der **Binomialkoeffizient** "k aus n" ist definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Beispiel 2.6. $\displaystyle\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10.$

3 Rechnen mit Binomialkoeffizienten

Man kann Binomialkoeffizienten mit Hilfe des **Pascalschen Dreiecks** bestimmen:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & / & & \backslash & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & / & \backslash & / & \backslash & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
/ & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & \dots & & &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{liefert}} \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Rechnenregeln:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; die Werte an den Seiten sind 1.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
das Dreieck ist achsensymmetrisch.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$;
jede Koeffizient ist die Summe der 2 darüber liegenden Koeffizienten.

4 Natürliche Potenzen und Polynome

Natürliche Potenzen: zu $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^n := \prod_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \cdots x}_{n-mal} \qquad \text{Man sagt “}x\text{ hoch }n\text{”, oder “}x\text{ zur }n\text{-ten Potenz”.}$$

Bemerkung: $x^0 = 1$, weil es ein leeres Produkt ist.

Rechnenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gelten mit obiger Definition:

1) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$;

2) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$.

Beispiel 4.1. $2^3 \cdot 4 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^5$, $(5^3)^2 = 5^6$, $x^{3^2} = x^9$.

Ein **Polynom** ist eine *endliche* Summe mit (reellen) Koeffizienten (oder Vorfaktoren) von natürliche Potenzen einer Variable (die meist mit x bezeichnet wird)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,, \qquad a_i \in \mathbb{R} \,.$$

Jedes Summand $a_i x^i$ heißt *Monom.* Als **Grad** des Polynoms wird der höchste Exponent j bezeichnet, für den der Koeffizient a_j nicht null ist. Dieser Koeffizient heißt **Leitkoeffizient**, und der Koeffizient a_0 heißt **Absolutglied**.
Das *Nullpolynom*, bei dem alle $a_i = 0$ sind, hat Grad $-\infty$.

Ein Polynom vom Grad 2 (bzw. 3) wird auch *quadratisches* (bzw. *kubisches*) Polynom genannt.

Beispiel 4.2. $\sqrt{18} x^5 \,, \qquad x^2 + \pi \,, \qquad x^7 - 2x + 2 \,, \qquad \sum_{w=0}^{2020} \frac{y^w}{w!} \,, \qquad -2\sqrt{7} \,.$

Diese Polynome haben Grad 5 bzw. 2, 7, 2020, 0.

4.1 Summe und Produkte von Polynomen

Polynome können nach dem assoziativen Additionsgesetz (Gruppierung aller ihrer Terme in einer einzigen Summe) summiert bzw. subtrahiert werden, möglicherweise gefolgt von einer Neuordnung und Kombination gleichartiger Terme.

Beispiel 4.3. Seien $P_1 := x^3 + 3x^2 + 5x - 2$, $P_2 := -x^3 - 3x^2 + 4$, dann

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= x^3 + 3x^2 + 5x - 2 - x^3 - 3x^2 + 4 = 5x + 2\,. \\ P_1 - P_2 &= x^3 + 3x^2 + 5x - 2 - (-x^3 - 3x^2 + 4) \\ &= x^3 + 3x^2 + 5x - 2 + x^3 + 3x^2 - 4 = 2x^3 + 6x^2 + 5x - 6\,. \end{aligned}$$

Um das Produkt aus zwei Polynomen zu einer Summe von Termen zu berechnen, wird das Verteilungsgesetz wiederholt angewendet, was dazu führt, dass jeder Term eines Polynoms mit jedem Term des anderen multipliziert wird.

Beispiel 4.4. Seien $Q_1 := 2x^3 + 3x + 5$, $Q_2 := -x^2 + 1$, dann

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= (2x^3 \cdot (-x^2) + (2x^3 \cdot 1) \\ &\quad + (3x \cdot (-x^2)) + (3x \cdot 1) \\ &\quad + (5 \cdot (-x^2)) + (5 \cdot 1) \\ &= -2x^5 + 2x^3 - 3x^3 + 3x - 5x^2 + 5 \\ &= -2x^5 - x^3 - 5x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

Eigenschaften: Seien P_1 und P_2 Polynome mit reellen Koeffizienten. Es gelten:

$$\mathrm{Grad}(P_1 \cdot P_2) = \mathrm{Grad}(P_1) + \mathrm{Grad}(P_2)\,, \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Grad}(P_1 + P_2) \leq \max(\mathrm{Grad}(P_1), \mathrm{Grad}(P_2))\,.$$

4.2 Binomische Formeln

Oft möchte man ein Polynom als Produkt von *einfacheren* Polynomen schreiben, dafür sind die folgenden Gleichungen von Nuten. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann

a) $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2$ (*erste/zweite binomische Formel*);

b) $x^2 - a^2 = (x - a) \cdot (x + a)$ (*dritte binomische Formel*);

c) $(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2 a + 3xa^2 \pm a^3$;

d) $x^3 - b^3 = (x - b) \cdot \left(x^2 + xb + b^2\right)$.

Satz 4.5 (Der binomische Lehrsatz)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}\,.$$

4.3 Polynomdivision

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen: Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren. Für ganze Zahlen gibt es auch die *Division mit Rest* z.B:

$6 : 3 = 2$ mit Rest 0, d.h. $6 = 2 \cdot 3 + 0$; $\quad 13 : 4 = 3$ mit Rest 1, d.h. $13 = 3 \cdot 4 + 1$.

Und ebenso für Polynome. Seien P_1 und P_2 Polynome, mit P_2 nicht Null. Man kann P_1 durch P_2 mit Rest dividieren, und das Ergebnis sind zwei (eindeutig gegebene) Polynome: Das Quotientpolynom Q, und das Restpolynom R, so dass

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x)\,, \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Grad}(R) < \mathrm{Grad}(P_2)\,.$$

Der Algorithmus, um Q und R zu finden, funktioniert für Polynome wie die Division ganzer Zahlen mit Rest.

Hier werden die Schritte am *Beispiel* $P_1 := 2x^3 - x^2 + 1$, $P_2 := x + 2$ erklärt.

◇ Es wird zuerst der Summand höchsten Grades von P_1 durch den Summanden höchsten Grades von P_2 geteilt: $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$. Dieses Monom wird danach mit P_2 multipliziert, und das Ergebnis $2x^2 \cdot (x+2) = 2x^3 + 4x^2$ wird von P_1 subtrahiert:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & +0x & +1 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(2x^3 & +4x^2) & & & 2x^2 \\ \cline{1-4}
 & -5x^2 & +0x & +1 &
\end{array}$$

◇ Wir wiederholen nun den oberen Schritt mit dem neuen Polynom $-5x^2 + 1$ statt P_1: $\frac{-5x^2}{x} = -5x$; $-5x \cdot (x+2) = -5x^2 - 10x$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & +0x & +1 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(2x^3 & +4x^2) & & & 2x^2 - 5x \\ \cline{1-4}
 & -5x^2 & +0x & +1 & \\
 & -(-5x^2 & -10x) & & \\ \cline{2-4}
 & & 10x & +1 &
\end{array}$$

Wir gehen dann so weiter, bis in mehreren solchen Schritten ein Rest entsteht, der nicht mehr durch P_2 teilbar ist, d.h. sein Grad kleiner ist als der Grad von P_2.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & +0x & +1 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(2x^3 & +4x^2) & & & 2x^2 - 5x + 10 \\ \cline{1-4}
 & -5x^2 & +0x & +1 & \qquad\uparrow \\
 & -(-5x^2 & -10x) & & \textit{Quotient} \\ \cline{2-4}
 & & 10x & +1 & \\
 & & -(10x & +20) & \\ \cline{3-4}
 & & & -19 & \leftarrow \textit{Rest}
\end{array}
\qquad \text{also} \quad P_1(x) = P_2(x)\cdot(2x^2 - 5x + 10) - 19\,.$$

Beispiel 4.6. Seien $S_1 := 6x^3 + x^2 + x + 2$ und $S_2 := 2x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +x^2 & +x & +2 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-(6x^3 & -3x^2 & +3x) & & 3x + 2 \\ \cline{1-4}
 & 4x^2 & -2x & +2 & \\
 & -(4x^2 & -2x & +2) & \\ \cline{2-4}
 & & & -- &
\end{array}
\qquad \text{also } 6x^3 + x^2 + x + 2 = (2x^2 - x + 1)\cdot(3x + 2)\,.$$

4.4 Nullstellen

Als **Nullstellen** eines Polynoms $P(x)$ werden jene Werte $b \in \mathbb{R}$ bezeichnet, für die die Gleichung $P(b) = 0$ gilt.

Satz 4.7. *Jedes Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

Beispiel 4.8. a) -2 und -1 sind die Nullstellen von $x^2 + 3x + 2$;
b) 1 ist die einzige reelle Nullstelle von $x^3 - 1$;
c) $x^2 + 1$ hat keine Nullstelle, da $x^2 \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $x^2 + 1 > 0$.

Satz 4.9. *Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$, dann teilt das Polynom $x - a$ das Polynom $P(x)$ mit Rest 0.*

Beispiel 4.10. Durch ausprobieren sieht man, dass $x^3 - 2x^2 + 1$ die Nullstelle $x = 1$ besitzt, also $(x - 1)$ teilt $x^3 - 2x^2 + 1$ mit Rest 0: $x^3 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x - 1) \cdot (x - 1)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-(x^3 & -x^2) & & & x^2-x-1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & +1 & & \\
 & -(-x^2 & +x) & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & +1 & \\
 & & -(-x & +1) & \\ \cline{3-4}
 & & & -- &
\end{array}
\qquad \text{also} \quad x^3-2x^2+1=(x^2-x-1)\cdot(x-1)\,.
$$

4.4.1 Quadratische Polynome

Hat ein quadratisches Polynom $ax^2 + bx + c$ zwei Nullstellen u, v, so ist

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - u) \cdot (x - v)\,.$$

Beispiel 4.11. $2x^2 - 2x - 4$ besitzt die Nullstellen $2, -1$, damit bekommt man

$$2x^2 - 2x - 4 = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$$

Wie erhält man diese Nullstellen? Durch **Quadratische Ergänzung**:

$$x^2 + 2\beta x + \gamma = x^2 + 2\beta x \underbrace{+\beta^2 - \beta^2}_{=0} + \gamma = (x + \beta)^2 - \beta^2 + \gamma\,.$$

Der **Betrag** von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$.

Beispiel 4.12.

$$0 = x^2 - \underbrace{6x}_{=2\beta x} + 5 = x^2 - 2 \cdot 3x \overbrace{\underbrace{+9}_{=\beta^2} - 9}^{=0} + 5 = (x - 3)^2 - 4\,, \text{ d.h. } (x - 3)^2 = 4,$$

und dann $|x - 3| = 2$, also $x - 3 = 2$ oder $x - 3 = -2$, d.h. $x = 5$ oder $x = 1$.
Genauso

$$0 = x^2 - 4x + 5 = \ldots = \underbrace{(x - 2)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1\,,$$

also besitzt dieses Polynom keine reelle Nullstelle.
Analog

$$0 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0\,,$$

also besitzt dieses Polynom *nur eine* Nullstelle, und zwar $x = -2$.

Bemerkung 4.13. Im Allgemeinen hat man die *Mitternachtsformel* (oder *p,q-Formel*)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad \text{wobei} \quad \Delta := b^2 - 4ac\,.$$

Also besitzt das Polynom 2 verschiedene Nullstellen falls $\Delta > 0$, nur eine Nullstelle falls $\Delta = 0$, und keine Nullstelle falls $\Delta < 0$.

Beispiel 4.14. Das Polynom $x^2 - x - 1$ besitzt die beiden Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Aussagenlogik und Mengenlehre

Um mathematische Konzepte zu formulieren verwendet man die Sprache der klassischen Logik.

5 Aussagen

Die Grundbausteine der Logik sind **Aussagen**. Eine Aussage ist ein mathematisch oder umgangssprachlich formulierter Satz, der genau einen (Widerspruchsfreiheit) der beiden Wahrheitswerte "wahr" und "falsch" (Tertium non datur) haben kann.

Beispiel 5.1.

a) "Alle Autos sind rot." (als deutsche Sprache zu interpretieren)

b) "Die Erde ist rund oder sie ist eine Scheibe."

c) "$5 + 7 = 12$." (als mathematische Symbole zu interpretieren)

d) "Die PLZ von Bayreuth ist gerade."
Vorsicht: Dies ist keine Aussage, da Bayreuth mehrere PLZ (z.B. 95444, 95445 oder 95440) hat. Es gibt dann keinen eindeutigen Warheitswert.

e) "Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist Summe zweier *Primzahlen*."
Das ist eine Aussage, da entweder wahr oder falsch ist. Ob sie wahr oder falsch ist, ist bis jetzt unbekannt (Goldbachsche Vermutung).

Definition 5.2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, dann sagt man: "a ist ein **Teiler** von b", wenn ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, mit $b = c \cdot a$. Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt **Primzahl**, wenn sie genau zwei positive Teiler besitzt, und zwar 1 und p selbst.

Aussagen werden oft mit Symbolen abgekürzt. Man schreibt dann

$$A := \text{"Es gibt lila Kühe."}$$

6 Prädikate

Ein **Prädikat** ist eine Folge von Symbolen, die Platzhalter (sog. **Variablen**) besitzt und durch füllen dieser Platzhalter mit Objektbezeichnungen zu einer Aussage wird.

Beispiel 6.1.

a) ... mag Gitarre spielen. (mit der Variable "...")

b) $x > 2$. (mit der Variable "x")

c) x ist ein Teiler von 3^n und $n \in \mathbb{Z}$. (mit den Variablen "x" und "n")
Wichtig: Was man für das erste n einsetzt, muss man auch für das zweite n einsetzen.

d) $x \in M$. (mit den Variablen "x" und "M")

e) Es regnet. (Da es nicht immer regnet, ist dies ein Prädikat abhängig von Zeit, Ort etc.)

Im Grunde sind Aussagen auch Prädikate, nämlich mit null Variablen. Bei der Abkürzung von Prädikaten werden die Variablen in einer Klammer angefügt:

$$P(x, a, b) := \text{"}x > \frac{a}{b} + 4\text{"}.$$

7 Mengen

Axiome sind Aussagen, die von vornherein als wahr festgelegt werden und den Umgang mit bestimmten Begriffen definieren.

Eine *Mengentheorie* (oder Mengenlehre) ist eine Sammlung von Axiomen, die definieren, was die zunächst bedeutungslose Aussage $A \in B$ bedeuten soll.

In der Mathematik wird hauptsächlich die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre verwendet. Wir haben hier nicht den Platz, um alle Axiome zu erklären. Für uns reicht es zu wissen, dass sie alles beinhaltet, was man von Haus aus als Menge bezeichnet.

Angehörigkeit: $A \in B$ bedeutet "A ist Element von B".

Prinzipiell kann eine Menge alles sein.

Beispiel 7.1.

a) Endliche Mengen, geschrieben als $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, wie z.B. $\{a, b, c, d\}$ oder $\{3, \text{Hund}, \text{Rakete}\}$.

b) Mengekonstruktion *durch Auflistung* der Elemente, z.B.

$$M := \{1, 2, 4\} \qquad \text{oder} \qquad G := \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.$$

Vorsicht: Reihenfolge und Wiederholung sind unerheblich, da Elemente nicht mehrfach enthalten sein können: $M = \{2, 1, 4\} = \{1, 4, 4, 2, 1, 2\}$.

c) Unendliche Mengen, wie z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$.

d) Mengekonstruktion *durch ein Prädikat* (Eigenschaften der Elemente):

$$S := \{x \mid P(x)\}$$

bedeutet "S ist definiert als die Menge aller Elemente x, die die Eigenschaft $P(x)$ erfüllen", also für jedes Element x können wir entscheiden, ob x zu S gehört. Z.B.

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \text{ gerade}\},$$

dann $-2 \in G$, $5 \notin G$, $Pizza \notin G$, $-2\pi \notin G$ ($\notin$ = "ist kein Element von").

e) Die **leere Menge** $\emptyset$ ist durch das Prädikat $P(x) :=$ "$x \neq x$" definiert, also als die Menge, für die die Aussage "$x \in \emptyset$" falsch ist, für jedes x.

Also, die leere Menge enthält *kein* Element.

f) Eine Menge M ist eine **Teilmenge** der Menge N, wenn alle Elemente von M zu N gehören, und man schreibt $M \subseteq N$.

Beispiel 7.2. $\{2,5,6\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{1,2,3\} \not\subseteq \{1,2,4,5\}$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

g) **Intervalle** sind zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, die keinen, einen, oder beide Grenzpunkte enthalten, z.B. $[0,2[= \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq x < 2\}$. Manchmal benutzt man auch die Notation $(-\infty,-3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$.

8 Junktoren-Verknüpfungen

Junktoren oder **Verknüpfungen** sind Symbole mit denen man Prädikate (insbesondere Aussagen) oder Mengen zusammensetzen kann, um neue Prädikate (bzw. Mengen) zu erzeugen. Seien in den folgenden Definitionen A und B Prädikate mit beliebigen Anzahlen von Variablen, und seien M und N Mengen.

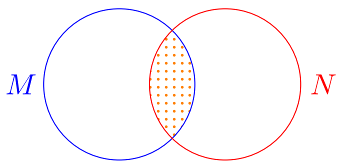
- **Konjunktion:** $A \wedge B$ (gesprochen "A und B") ist wahr, wenn beide Aussagen A und B wahr sind, und falsch ansonsten.
Wir können diese Definition auch mit Hilfe einer *Wahrheitstafel* darstellen:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Mengentheoretisch wollen wir ausdrücken, dass ein Element in beiden Mengen ist. Wir erhalten die **Schnittmenge** oder *Schnitt*:

$$M \cap N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}\,,$$

diese Menge besteht aus alle Elemente, die *sowohl* in M *als auch* in N sind.



Zwei Mengen M und N, für die $M \cap N = \emptyset$ gilt, heißen **disjunkt** oder *schnittfrei*.

Beispiel 8.1. Seien $A :=$"Ich lese" und $B :=$"Ich spiele Klavier", dann:
$A \wedge B =$"Ich lese und spiele Klavier".

Seien $R := \{2,-94,5,\pi\}$ und $S := \{2,-3,\pi,9,6\sqrt{11}\}$, dann ist $R \cap S = \{2,\pi\}$.

- **Disjunktion:** $A \vee B$ (gesprochen "A oder B") ist wahr, wenn mindestens eine der zwei Aussagen wahr ist.

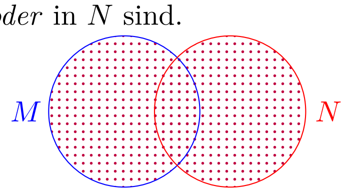
A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Bemerkung 8.2. "$\vee$" ist *kein* "entweder oder"!

Mengentheoretisch wollen wir ausdrücken, dass ein Element in mindestens einer der zwei Mengen ist.
Vereinigungsmenge oder *Union*:

$$M \cup N := \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}\,,$$

diese Menge besteht aus alle Elemente, die in M *oder* in N sind.



Beispiel 8.3. Seien $A :=$"Er schläft" und $B :=$"Er trägt eine Maske", dann:
$A \vee B =$ "Er trägt eine Maske oder schläft".

Seien $R := \{-2,94,7,\pi\}$ und $S := \{-2,3,6,7,2\pi\}$, dann ist $R \cup S = \{-2,94,7,\pi,3,6,2\pi\}$.

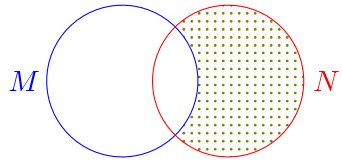
- **Negation:** $\neg A$ (gesprochen "nicht A") ist immer wahr, wenn A falsch ist, und umgekehrt.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Mengentheoretisch erhalten wir die **Differenzmenge** oder das Komplement:

$$N \backslash M := \{x \in N \mid \neg(x \in M)\},$$

diese Menge besteht aus alle Elemente von N, die *nicht* in M sind.



Beispiel 8.4. Sei A :="Ich bin aus Bayreuth", dann: $\neg A$ = "Ich bin nicht aus Bayreuth".

Seien $R := \{2,4,5\}$ und $S := \{2,3\}$, dann sind $R \setminus S = \{4,5\}$ und $S \setminus R = \{3\}$.

- **Implikation:** $A \Rightarrow B$ (gesprochen "A impliziert B"):

Um diesen Junktor zu verstehen fangen wir mit den Mengen an. Wir wollen ausdrücken, dass M eine *Teilmenge* von N ist: $M \subseteq N$, falls stets gilt

$$(x \in M) \wedge (x \in N) \text{ oder } (x \notin M) \wedge (x \in N) \text{ oder } (x \notin M) \wedge (x \notin N)\,.$$

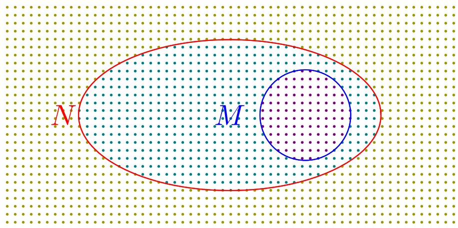
Wir wollen wir *nicht*, dass ein Element in M und nicht in N ist: $(x \in M) \wedge (x \notin N)$.

M.a.W., wenn x ein Element von M ist, dann muss x auch ein Element von N sein.

Logischerweise wollen wir also, dass eine der folgenden Möglichkeiten gilt:

(A und B wahr) (A falsch und B wahr) (A und B falsch)

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w



Beispiel 8.5. i) Seien A :="Ich jogge" und B :="Ich höre Musik", dann $A \Rightarrow B$ ="Wenn ich jogge, dann höre ich Musik", d.h. "Ich jogge nicht, ohne Musik zu hören".

ii) Seien H := "Ich schlage mir mit dem Hammer auf den Finger", S :="Ich spüre Schmerz".

H	S	$H \Rightarrow S$		
f	f	w	Wenn ich mir ... nicht schlage, dann spüre ich keinen Schmerz	Das kann alles passieren.
f	w	w	Wenn ich mir ... nicht schlage, dann spüre ich Schmerz	
w	w	w	Wenn ich mir ... schlage, dann spüre ich Schmerz	
w	f	f	Wenn ich mir ... schlage, dann spüre ich keinen Schmerz	Das nicht!

Andere Aussprachen für $A \Rightarrow B$ sind "aus A folgt B", "wenn A, dann B", "A ist eine *hinreichende* Bedingung für B" und "B ist eine *notwendige* Bedingung für A".

Insbesondere kann man aus einer falschen Aussage alles folgen, ohne einen Fehler zu machen (Ex falso queodlibet). Z.B. "Wenn meine Größmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus" ist sicher wahr, solange meine Größmutter keine Räder hat.

- **Äquivalenz:** $A \Leftrightarrow B$ (gesprochen "A genau dann, wenn B"):

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Äquivalente Aussagen sind logisch gleichwertig, also ist "$\Leftrightarrow$" das *logische Gleichheitszeichnen.*

Gleichheit von Mengen:
$M = N$, falls die beiden Menge genau die selben Elemente enthalten, d.h. falls

$$M \subseteq N \wedge N \subseteq M\,.$$

M.a.W. falls das Prädikat

$$(x \in M) \Leftrightarrow (x \in N)$$

immer wahr ist.

Beispiel 8.6. Seien $E := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ und $F := \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 5\} = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$, dann gilt

$$E \backslash F = \{0, 2, 4\}\,, \quad F \backslash E = \{7, 9, 11, 13, \ldots\}\,, \quad E \cap F = \{6, 8, 10, 12, \ldots\}\,, \quad E \cup F = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots\}\,.$$

8.1 Rechenregeln

Rechenregeln für Junktoren schreiben wir mit Hilfe von **Tautologien** auf. Das sind Ausdrücke aus Junktoren und Variablen, die immer wahr sind unabhängig davon, welche Wahrheitswerte man für die Variablen einsetzt.Wichtige Rechenregeln sind:

- **Doppelte Negation:** $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.

  Überprüfung mit einer Wahrheitstafel.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

  Das bedeutet also, wir können statt $\neg(\neg A)$ immer auch A schreiben.

- **Gesetze von de Morgan:**

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\iff (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &\iff (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned}$$

- **Negation der Implikation:** $\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge (\neg B)$.
- **Negation der Äquivalenz:** $\neg(A \Leftrightarrow B) \iff (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$.
- **Distributivgesetze:**

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

- **Ersetzen der Implikation:** $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A) \vee B$.
- **Kontraposition:** $(A \Rightarrow B) \iff ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.

8.2 Mehr Verknüpfungen

- Aus $m \in M$ und $n \in N$ lässt sich das **geordnete Paar** (m, n) bilden (Reihenfolge ist wichtig). Die Menge aller dieser Paare

  $$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M\,, n \in N\}$$

  heißt das **kartesische Produkt** [1] von M und N.

  Wir benötigen Mengen von Paaren, Tripeln etc., um die Lösungsmengen von Prädikaten mit mehr als einer Variablen beschreiben zu können.

  Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Wir können allgemein das *kartesische Produkt*

  $$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

  als Menge aller **geordneten n-Tupel** definieren. Gleichheit für geordnete n-Tupel ist folgendermaßen definiert:

  $$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff a_i = b_i\,,\ \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

  Für eine Menge A schreibt man das kartesische Produkt von n Kopien von A kurz

  $$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}}.$$

- Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist definiert als die Menge aller Teilmengen von M ($A \subseteq M$, falls $(x \in A) \Rightarrow (x \in M)$), d.h. es gilt

  $$A \in \mathcal{P}(M) \iff A \subseteq M.$$

Beispiel 8.7.

d-i) $\{1, 2\} \times \{2, 4\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$.

d-ii) $\{-2, \diamond\} \times \{a, \mathbb{N}, H\} = \{(-2, a), (-2, \mathbb{N}), (-2, H), (\diamond, a), (\diamond, \mathbb{N}), (\diamond, H)\}$.

d-iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + y = 8 \ \wedge\ 3x + y = 7\} = \{(-1, 10)\}$

e-i) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

e-ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

9 Mächtigkeit

Sei M eine Menge. Dann bezeichnet die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

Beispiel 9.1.

- $|\{2, 4, 1, 7, -1\}| = 5$, $|\{2, \text{Hund}, \text{Rakete}\}| = 3$.
- $|\{3, 6, \text{Banane}, 3\}| = 3$, da Wiederholungen unerheblich sind, also wird 3 nur einmal gezählt.
- $|\emptyset| = 0$ (die leere Menge ist die einzige Menge mit keinem Element).

[1] Benannt nach dem französichen Mathematiker René Descartes bzw. Renatus Cartesius (1596-1650).

a) $|\{1, \text{Haus}, \alpha, \mathbb{Z}\}| = 4$. **Wichtig**: Obwohl die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine unendliche Menge ist, zählt es hier als ein Element!

- $|\{1,2\} \times \{2,3\}| = 4$, $|\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8$.

- Für $A, B, A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen gelten die folgenden Rechnenregeln:
  a) Falls $A \subseteq B$, dann ist $|A| \leq |B|$.

  b) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

  c) $|A \times B| = |A| \cdot |B|, \quad |A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

  d) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
  (Aus diesem Grund schreibt man die Potenzmenge von A auch 2^A.)

Prädikatenlogik

10 Quantoren

Häufig kommt es vor, dass man Aussagen über alle Elemente einer Menge oder die Existenz eines Elementes mit einer besonderen Eigenschaft betrachen möchte.

Beispiel 10.1.

a) Es gibt Hunde, die bellen und nicht beißen.

b) Zu jeder positive reellen Zahl existert eine reelle Zahl, sodass das Quadrat der letzteren die erstere ist.

Um diese Struktur logisch auszudrücken, führen wir folgende Schreibweisen ein:
Der **Allquantor** $\forall$ leitet eine kategorische Aussage ein: $\forall x$ “für alle x”

Beispiel 10.2. $\forall x \in \mathbb{R}$ “für alle x in $\mathbb{R}$” oder “für jede reelle Zahl x”

Der **Existenzquantor** $\exists$ leitet eine Existenzaussage ein: $\exists x$ “es existiert ein x”

Beispiel 10.3. $\exists x \in \mathbb{R}$ “es gibt (mindestens) ein x in $\mathbb{R}$” oder “für mindestens eine reelle Zahl x”

Durch jeden Quantor wird eine neue Variable ins Leben gerufen.
Wenn das Variable eines Prädikats durch einen Quantor festgelegt wird, entsteht eine fertige Aussage:

$$\underbrace{\text{Quantor} : \text{Prädikat}}_{\text{Aussage}}$$

Um das Prädikat von den Quantoren zu trennen, verwendet man einen Doppelpunkt.

- $\forall x :$ “für alle x gilt, (dass)”
- $\exists x \in \mathbb{R} :$ “es gibt ein x in $\mathbb{R}$, sodass (gilt)”
- $\exists x \in \mathbb{R}, x > 0 :$ “es existiert ein positives x in $\mathbb{R}$, sodass”

Mit diesen Konventionen können wir unsere Beispiele sehr knapp schreiben:

Beispiel 10.4. a) $\exists h \in \text{Hunde} : \ h \text{ bellt} \wedge \neg(h \text{ beißt})$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$.

Vorsicht: Die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig. In b) ist y offenbar von x abhängig.

Beispiel 10.5. Die folgende Aussage beschreibt die “Dichtheit” von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}, x < y \ \exists q \in \mathbb{Q} : \ x < q < y.$$

Beispiel 10.6 (Mengengleichheit)**.** $M = N \ :\Leftrightarrow \ (\forall x : \ x \in M \Leftrightarrow x \in N)$. (“$:\Leftrightarrow$” heißt “ist per Definition äquivalent zu”.)

Beispiel 10.7 (Teilmenge)**.** $M \subseteq N \ :\Leftrightarrow \ (\forall x : \ x \in M \Rightarrow x \in N)$.

Manchmal wollen wir ausdrücken, dass es *genau ein* Element gibt, das ein Prädikat erfüllt. Dafür definieren wir den **Eindeutigkeitsquantor** $\exists!$. Sei $P(x)$ ein Prädikat:

$$\exists! x : P(x) \ :\Leftrightarrow\ (\exists x : P(x)) \wedge (\forall y, P(y) : \ y = x\,).$$

Beispiel 10.8. $\exists! x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^2 = 2$

11 Negation von Quantoren

Wenn es nicht der Fall ist, dass ein Prädikat $P(x)$ für alle x gilt, dann gilt es für mindestens ein x nicht. Man kann also sagen:

$$\neg(\forall x : P(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x : \neg P(x).$$

Ist es umgekehrt nicht der Fall, dass ein Prädikat $P(x)$ für mindestens ein x gilt, dann gilt es für alle x nicht. Man erhält eine symmetrische Regel:

$$\neg(\exists x : P(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x : \neg P(x).$$

Beispiel 11.1. Sei $P(x)$ die Aussage "Der Elefant x fliegt". Dann formulieren wir die Aussage "Es gibt einen fliegenden Elefanten" als $\exists x : P(x)$. Die Negation: "Es gibt keinen fliegenden Elefanten", kann man als $\forall x : \neg P(x)$ schreiben: "Für jeden Elefant gilt, er fliegt nicht."

Diese Regel lässt sich leicht auf längere Ketten von Quantoren ausweiten:

$$\begin{aligned}
& \neg(\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : \ y^2 = x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall y \in \mathbb{R} : \ \neg(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : \quad y^2 = x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}, x > 0 : \ \neg(y^2 = x) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}, x > 0 : \ y^2 \neq x.
\end{aligned}$$

Funktionen

12 Definitionen

Definition 12.1. Eine **Funktion** $f : X \to Y$ besteht aus drei Komponenten: die *Definitionsmenge* X, die *Zielmenge* Y und eine *Abbildungsvorschrift* (oder *Zuordnungsvorschrift*), die jedem Element der Definitionsmenge X *genau ein* Element der Zielmenge Y zuordnet.

Die Abbildungsvorschrift erklärt, welchem Wert des **Arguments** der Funktion welcher **Funktionswert** zugeordnet wird. Das heißt,

$$\forall x \in X \; \exists! y \in Y : y \text{ ist zu } x \text{ zugeordnet}$$

diesen Funktionswert y nennen wir $f(x)$.

Bemerkung 12.2. Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element y der Zielmenge Y kann einem, mehreren, und keinem Element der Definitionsmenge X zugeordnet sein.

Beispiel 12.3. i) $f : \{\text{Spieler von Medi Bayreuth}\} \to \mathbb{N}$, $f(s) =$ Trikotnummern des Spielers s.

ii) $g : \{\text{Personen}\} \to \{\text{Berufe}\}$, $g(p) =$ Beruf der Person p; diese ist *keine* Funktion, da einige Personen keinen Job haben.

iii) $\alpha : \{\text{Musiker}\} \to \{\text{Instrumente}\}$, $\alpha(m) =$ Instrument, das m spielt; diese ist *keine* Funktion, da einige Musiker mehrere Instrumente spielen.

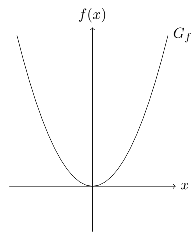
Definition 12.4. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

i) Die Menge $G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ wird der **Graph** von f genannt.

ii) Die **Bildmenge** von f (oder **Bild**) $\text{Bild}(f)$ (oder $\text{Im}(f)$) ist die Menge der tatsächlich vorkommenden Funktionswerte:

$$\text{Bild}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \subseteq Y$$

Beispiel 12.5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, dann ist $G_f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ der Graph von f und $\text{Bild}(f) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ ihr Bild.



Wann sind zwei Funktionen gleich?

Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie die folgende Bedingungen erfüllen

a) gleiche Definitions- und Zielmenge haben

b) auf der ganzen Definitionsmenge die gleichen Werte liefern.

Beispiel 12.6.

i) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty), g(x) = x^2$ sind *nicht gleich*, weil die Zielmenge verschieden sind.

ii) Die Funktionen $a : \{0, 1\} \to \{0, 1\}, a(x) = x$ und $b : \{0, 1\} \to \{0, 1\}, b(x) = x^2$ sind *gleich*, tatsächlich $a(0) = 0 = b(0)$ und $a(1) = 1 = b(1)$.

13 Funktionen definieren

Es gibt mehrere Möglichkeiten, um Funktionen zu geben:

a) Mittels *eindeutiger Zuordnungsvorschrift* (wie oben)

Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(a) = a + 1$ oder $a \mapsto a + 1$.

Auch Fallunterscheidungen sind üblich, z.B.

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} t^2 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

b) Mittels *Wertetabelle* $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$

x	1	2	3
$f(x)$	a	a	b

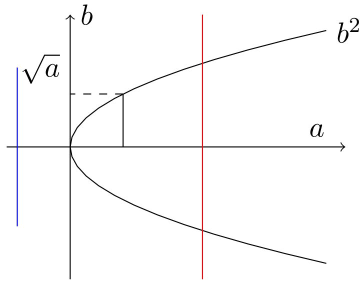
Abbildungen brauchen *wohldefinierte Zuordungsvorschriften*:

Definition 13.1. Eine Zuordungsvorschrift heißt **wohldefiniert**, falls sie auf der ganzen Definitionsmenge:
- erklärt ist und Werte der Zielmenge liefert (Existenz);
- eindeutige Werte liefert (Eindeutigkeit).

c) Mittels *charakteristischer Eigenschaft.*
Z.B. i) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(a) = b$ wobei $b \in [0, +\infty)$ mit $a = b^2$;
ii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(a) = b$ wobei $b \in \mathbb{R}$ mit $a = b^2$;
iii) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(a) = b$ wobei $b \in [0, +\infty)$ mit $a = b^2$.

"In allen drei Fällen muss b die einzige Zahl sein, deren Quadrat a ist".

In ii) fehlt Eindeutigkeit: zu $a > 0$ gibt es zwei Möglichkeiten.
In iii) fehlt Existenz: zu $a < 0$ gibt es kein b.
So ist nur i) wohldefiniert: Es gibt genau eine einzige Möglichkeit für b: $b = \sqrt{a}$.



d) Mittels *repräsentantenunabhängiger Zuordungsvorschrift*:

Beispiel 13.2. i) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,,\ \dfrac{a}{b} \mapsto \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$.
Da $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, ist hier implizit $\frac{a}{b}$ eine beliebige Darstellung für einen Bruch, z.B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$.

f ist wohldefiniert:
Existenz: "Der Wert $f\left(\frac{a}{b}\right)$ muss existieren und in $\mathbb{Q}$ sein". Da $a, b \in \mathbb{Z}$ sind, ist a^2 eine ganze Zahl, und $a^2 + b^2$ ist eine positive (weil $b \neq 0$) ganze Zahl, und danit $\frac{a^2}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Eindeutigkeit: "Der Wert $f\left(\frac{a}{b}\right)$ muss von der Darstellung von $\frac{a}{b}$ unabhängig sein". Seien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zwei Darstellungen der gleichen Zahl, so ist

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2}+1} = \frac{\frac{c^2}{d^2}}{\frac{c^2}{d^2}+1} = \frac{c^2}{c^2+d^2} = f\left(\frac{c}{d}\right) .$$

ii) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,,\ \dfrac{a}{b} \mapsto a$

g ist nicht wohldefiniert, da $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ aber $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 5 = g\left(\frac{5}{10}\right)$; d.h. g ist keine Funktion.

Komposition (Verkettung/Verknüpfung) von Funktionen.

Definition 13.3. Seien $f : A \to B$, $g : C \to D$ Funktionen mit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq C$, so ist $h := g \circ f$ ("*g komponiert mit f*", oder "*g verknüpft f*", oder "*g Kringel f*", oder "*g nach f*") die Abbildung $h : A \to D\,, x \mapsto g(f(x))$.

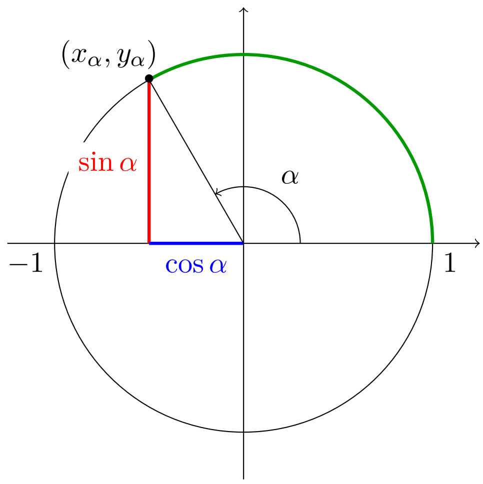
Beispiel 13.4. Seien $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, n \mapsto n+3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x^2$, dann gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, so ist die Komposition $h := g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, und $h(s) = g(f(s)) = g(s+3) = (s+3)^2$.

14 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \alpha \mapsto \sin(\alpha)$	**Sinus**	und
$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \alpha \mapsto \cos(\alpha)$	**Kosinus**	

liefern die Achsenabstände (Koordinaten) der Punkte des Einheitskreises E in Abhängigkeit des Winkels α.



$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist der Kreis von Radius 1 um 0.

Sei $(x_\alpha, y_\alpha) \in E$ wie im Bild, dann $(x_\alpha, y_\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Winkel werden üblicherweise als *"Bogenlänge im Einheitskreis"* (auch Bogenmaß, oder Radiant) gemessen. Im Bild ist α die Länge des grünen Kreisbogens. Eine Umdrehung *gegen* den Uhrzeigersinn misst 2π, denn der Kreisumfang von E misst 2π.

$$\text{Winkel im Bogenmaß} = \text{Winkel im Gradmaß} \cdot \frac{\pi}{180ř}$$

Beispiel 14.1. 90ř $= \frac{\pi}{2}$, 180ř $= \pi$, -45ř $= -\frac{\pi}{4}$ (Minus bedeutet *im* Uhrzeigersinn), "2 Umdrehung"$=$ 720ř $= 4\pi$.

Rechnenregeln: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann:

• Mit dem Satz des Pythagoras sieht man, dass $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ gilt.

• Anhand von dem obigen Bild gelten

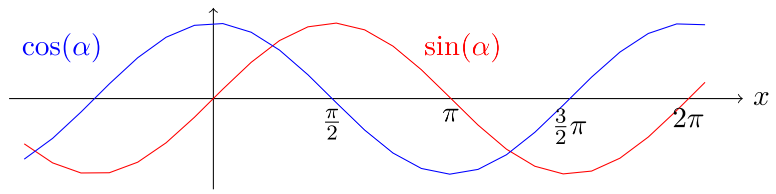
$$\begin{array}{rclrcl} \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha)\,, & \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\ \sin(\pi-\alpha) & = & \sin(\alpha) & \cos(\pi-\alpha) & = & -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) & = & \cos(\alpha) & \cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) & = & -\sin(\alpha) \end{array}$$

• Die Funktionen Sinus und Kosinus sind 2π-**periodisch**, d.h. $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$ und $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$.

• Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\,, \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\,. \end{array}$$

Graph von Sinus und Kosinus:



Spezielle Werte von Sinus und Kosinus:

	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0ř	0	0	1
30ř	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45ř	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60ř	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
90ř	$\frac{\pi}{2}$	1	0

15 Potenzen

Natürliche Potenzen: zu $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n-mal} \qquad \text{Man sagt “}x\text{ hoch }n\text{”, oder “}x\text{ zur }n\text{-ten Potenz”.}$$

Rechnenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gelten mit obiger Definition:

1) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$;

2) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$.

Potenzen: Wir möchten, dass diese Rechenregel für $x \in (0, +\infty)$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ gelten. Dann müssen die folgenden Eigenschaften gelten:

- $x^0 = 1$, denn $x^0 \cdot x = x^{0+1} = x \Rightarrow x^0 = 1$ (Wegen $x \neq 0$, kann man x kürzen).
- Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$ ist $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, denn $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$.
  $\sqrt[n]{x}$ bezeichnet die *einzige positive reelle Zahl*, deren n-te Potenz x ist.
- Für $m \in \mathbb{N}$ ist $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, denn

$$x^{-m} \cdot x^m = x^0 = 1 = \frac{1}{x^m} \cdot x^m\,,$$

  und dann kürzt man $x^m \neq 0$.

$\Rightarrow$ Für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ist $x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Bemerkung 15.1. Es wurde nicht gezeigt, dass diese Definition *immer* beide Regeln erfüllt!

Beweise

16 Beweise

Definition 16.1 (Beweis)**.** Eine Aussage ist **bewiesen**, wenn man eine Reihe von logischen Schlussfolgerungen angegeben hat, an deren Anfang eine wahre Aussage, und an deren Ende die zu beweisende Aussage steht.

Beispiel 16.2 (nach Lewis Carroll, Autor von *Alice im Wunderland*)**.** Wir betrachten die folgenden drei Aussagen:

a) Babys sind unlogisch.

b) Niemand, der verachtet wird, kann mit einem Krokodil umgehen.

c) Unlogische Leute werden verachtet.

Sei $x \in$ (Leute) und die vier Prädikate seien $A(x) =$ "x ist ein Baby", $B(x) =$ "x ist logisch", $C(x) =$ "x ist verachtet", $D(x) =$ "x kann mit einem Krokodil umgehen".

Jetzt formulieren wir die Aussagen als logischen Ausdruck:

a) $x : A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

b) $x : C(x) \Rightarrow \neg D(x)$.

c) $x : \neg B(x) \Rightarrow C(x)$.

In der richtigen Reihenfolge:

$$x : A(x) \Rightarrow \neg B(x) \Rightarrow C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

Das heißt: "Babys können nicht mit einem Krokodil umgehen".

17 Beweistechnike

Beweistechnik: der direkte Beweis Man beginnt mit den Voraussetzungen von A und leitet aus diesen die zu beweisende Aussage B direkt durch logische Schlussfolgerungen her: $A \Rightarrow S_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow S_n \Rightarrow B$. Damit wird die Implikation $A \Rightarrow B$ bewiesen.

Beispiel 17.1. Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{Z} :\ 4 \text{ teilt } n \ \Rightarrow\ 2 \text{ teilt } n$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit 4 teilt n. Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 4 \cdot m$ (nach Definition 5.2). Also gilt: $n = 2 \cdot 2 \cdot m = 2 \cdot (2 \cdot m)$. Dies zeigt: 2 teilt n. □

Beispiel 17.2. Absolut wichtig ist, dass die Folgerungsrichtung von der wahren Aussage weggeht!

$$\begin{array}{rl|l} & x = -x & \cdot^2 \\ \Rightarrow & x^2 = x^2 & -x^2 \\ \Rightarrow & 0 = 0 & \end{array}$$

ist kein Beweis für $x = -x$.

Beweistechnik: Kontraposition Diese benutzt die Tautologie:

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beispiel 17.3. Sei $q \in \mathbb{N}$. Ist q^2 gerade, dann ist auch q gerade.
Wir zeigen die Implikation, indem wir die Kontraposition beweisen:

$$q \text{ ist ungerade } \Rightarrow\; q^2 \text{ ist ungerade.}$$

Beweis. Sei $q \in \mathbb{N}$ ungerade.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} : \; q = 2k - 1. \\ &\Rightarrow\; q^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 - 2k) + 1. \\ &\Rightarrow\; q^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

□

Beweistechnik: Fallunterscheidung Manchmal ist es hilfreich, den Beweis aufzuspalten. Zuerst nehmen wir an, dass eine bestimmte Eigenschaft $x \in X$ gilt. Wir verwenden die Eigenschaft, um den Satz zu beweisen. Danach, weisen wir nach, dass wenn $x \notin X$ gilt, ist der Satz auch gültig.

Beispiel 17.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. $n^2 + n$ ist gerade.

Beweis.

Fall 1: n ist gerade Es existiert $k \in \mathbb{N}$ sodass $2k = n$ und es gilt $n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$. Also ist $n^2 + n$ gerade.

Fall 2: n ist ungerade Es existiert $k \in \mathbb{N}$ sodass $2k - 1 = n$ und es gilt $n^2 + n = (2k-1)^2 + (2k-1) = 4k^2 - 2k = 2(2k^2 - k)$. Also ist $n^2 + n$ wieder gerade.

□

Beweistechnik Widerspruchsbeweis Hier nutzt man die Tautologie

$$A \;\Leftrightarrow\; (\neg A \Rightarrow \mathbf{F})$$

wobei $\mathbf{F}$ eine immer falsche Aussage bezeichnen soll, das *Falsum*. Die immer wahre Aussage ist das *Verum* $\mathbf{W}$.
Wir setzten im Beweis die Negation der Behauptung voraus und wollen eine falsche Aussage herleiten.

Beispiel 17.5 (Satz von Euklid – Elemente, Buch IX, Proposition 20)**.** Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Angenommen: Es gibt nur endlich viele Primzahlen: $p_1, \ldots, p_n$ mit $n \geq 1$.
Sei $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

$\Rightarrow q > 1$

$\Rightarrow \exists m \in \{1, \ldots, n\} : p_m$ teilt q

$\Rightarrow p_m$ teilt $q - p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = 1$

$\Rightarrow p_m = 1$ nicht prim. Widerspruch! □

Beweistechnik Existenzbeweis Kommt der Existenzquantor $\exists$ in einer Aussage vor, reicht es, das gesuchte Objekt zu konstruieren oder wenigstens zu zeigen, dass man es konstruieren kann. (Manche Beweise sind auch komplett nicht-konstruktiv.)

Beispiel 17.6. (Konstruktiv) Zeigen Sie: $\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ n \geq q$.
Für jedes $q \in \mathbb{Q}$ muss also ein passendes n konstruiert werden (normalerweise abhängig von q).

Beweis. Sei $q \in \mathbb{Q}$.

Fall 1: $q \leq 0$. Dann kann man $n := 0 \in \mathbb{N}$ wählen, da $0 \geq q$.

Fall 2: $q > 0 \ \Rightarrow\ \exists a, b \in \mathbb{N}, b \geq 1 :\ q = \dfrac{a}{b}$

$$\Rightarrow\ q \leq b \cdot q = \frac{b \cdot a}{b} = a. \text{ Wähle also } n := a \in \mathbb{N}.$$

□

Beispiel 17.7. (Nicht Konstruktiv) Das polynom $x^3 - 3x + 1$ besitzt eine Nullstelle zwischen -1 und 1.

Beweis. Man setze 1 ins Polynom ein, und das Ergebnis ist -1, also < 0. Man setze -1 ein, und das Ergebnis ist 3, also > 0. Es folgt dass, es eine Nullstelle zwischen -1 und 1 gibt (Zwischenwertsatz). □

Beweistechnik: vollständige Induktion Sei $A(n)$ ein Prädikat. Dann gilt

$$(A(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} :\ A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} :\ A(m).$$

Beweis. Es gelte $A(0)\ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N} :\ A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Sei $m \in \mathbb{N}$.
Die Aussage $A(1)$ gilt, da $A(0)$ gilt.
Die Aussage $A(2)$ gilt dann, weil $A(1)$ gilt, usw. Nach endlichen viele Schritten zeigt man, dass $A(m)$ gilt. □

Ein Induktionsbeweis teilt sich also in zwei Schritte: Der Beweis von "$A(0)$" heißt *Induktionsanfang* (IA) und der Beweis von "$\forall n \in \mathbb{N} :\ A(n) \Rightarrow A(n+1)$" *Induktionsschritt* (IS).

Bemerkung 17.8. Eine Induktionsbeweis funktioniert wie ein Dominoeffekt: Durch dem IA bestätigen wir dass der erste Dominostein fällt, und durch den IS sind wir dann sicher, dass jeder fallende Dominostein den nächste umstößt. Jeder Dominostein der unendlich lang gedachten Kette wird schließlich irgendwann umfallen.

Beispiel 17.9. Wir beweisen die folgende Formel durch vollständige Induktion über n:
Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $1 \neq r \in \mathbb{R}$ es gilt

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

Beweis.

IA: $(n = 0)$ Die Formel gilt für $n = 0$ da $a = \frac{a(1-r)}{1-r} = a$. (Hier benutzen wir dass $r \neq 1$.)

IS: $(n-1 \to n)$ Wir nehmen an, dass die Formel für $n-1$ gilt:

$$a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} a + ar + \cdots + ar^n &= (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n \\ &= \frac{a(1-r^n) + ar^n(1-r)}{1-r} = \frac{a - ar^n + ar^n - ar^{n+1}}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

□

Satz 17.10 (Der binomische Lehrsatz)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}.$$

Beispiel 17.11.

$(a+b)^0 = 1$						1						
$(a+b)^1 = a + b$					1		1					
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$				1		2		1				
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$			1		3		3		1			
$(a+b)^4 = a^4 + a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$		1		4		6		4		1		
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 104a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1		5		10		10		5		1	

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n.

IA: $(n = 0)$ Zuerst beweisen wir, dass die Gleichung für $n = 0$ gilt:

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k \cdot b^{-k}.$$

IS: $(n-1 \to n)$ Hier nehmen wir an, dass die Gleichung für $n-1$ gilt, und wir zeigen, dass sie für n gilt. Also gelte

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k \cdot b^{n-1-k}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b) \cdot (a+b)^{n-1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k \cdot b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} \cdot b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k \cdot b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k \cdot b^{n-k} \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k \cdot b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k \cdot b^{n-k} + b^n \end{aligned}$$

$$= \quad a^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] a^k \cdot b^{n-k} + b^n$$

$$= \quad \binom{n}{n} a^n \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} + \binom{n}{0} a^0 \cdot b^n$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}\,.$$

□

Bemerkung 17.12. (**Starke vollständige Induktion**) Manchmal reicht allein $A(n)$ für $A(n+1)$ nicht aus und man benötigt auch andere vorherige Fälle, aber das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch mit der folgenden schwächeren Voraussetzung. Der obige Beweis geht für beide Aussagen.

$$(A(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (A(0) \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ A(n)) \ \Rightarrow \ A(n+1)\,) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \ A(m).$$

Beispiel 17.13. Die Fibonacci-Folge: Sei $\{F_n\}$ die Fibonacci-Folge, die durch

$$F_0 = F_1 = 1\,, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert ist.
Sei Φ der *goldene Schnitt*, d.h. die einziege positive reelle Losung der Gleichung

$$x^2 = x + 1\,, \quad \Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033...$$

Dann

$$F_n \geq \Phi^{n-2}$$

gilt für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir zeigen die Ungleichung durch starke Vollständige Induktion.

IA: Da $\Phi > 1$, ist die Ungleichung für $n = 0, 1$ trivial:

$$F_0 = 1 > \Phi^{-2} \qquad \text{und} \qquad F_1 = 1 > \Phi^{-1}\,.$$

IS: Jetzt nehmen wir an, dass die Ungleichung für $0 \leq m \leq n$ gilt, und wir zeigen sie für $n+1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \Phi^{n-2} + \Phi^{n-3} = \Phi^{n-3}(1+\Phi) = \Phi^{n-3} \cdot \Phi^2 = \Phi^{n-1}$$

□

Gleichungen und Ungleichungen

18 Gleichungen

Eine **Gleichung** ist ein Prädikat der Form $A = B$.

Beispiel 18.1.

$1 + 7 = 2 + 6$	(Gleichung von Zahlen, keine Variable)
$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 1, 2\}$	(Gleichung von Mengen, keine Variable)
$\{1, 2, x\} = \{1, 5, y\}$	(Gleichung von Mengen, Variablen "x" und "y")
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup X$	(Gleichung von Mengen, Variable "X")
$5 + x = 12$	(Gleichung von Zahlen, Variable "x")
$\{1, 2, x\} = \{1, 3, 4\}$	(Gleichung von Mengen, Variable "x", ohne Lösung?)

Man kann Gleichungen beliebiger Objekte aufstellen, sofern definiert ist, was "$=$" bedeuten soll, z.B. Gleichungen von Funktionen, Vektorräumen etc.

18.1 Richtigkeit einer Gleichung

Aussagen über die Richtigkeit einer Gleichung legen einen **Individuenbereich** der Variablen fest:

$$\forall x \in X : A(x) = B(x).$$

Beispiel 18.2. Behauptung: $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 = 1 + (x + 1)(x - 1)$.

Beweis. (Direktes Nachrechnen) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt: $1 + (x + 1)(x - 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$. □

Alternativ:

Beweis. (Direkte Herleitung) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nachdem dritten binomischen Formeln, es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x + 1)(x - 1) \qquad | + 1 \\ \Rightarrow x^2 &= 1 + (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

□

18.2 Falschheit einer Gleichung

Die **Falschheit einer Gleichung** ist die Negation der Richtigkeit:

$$\neg(\forall x \in X : A(x) = B(x)) \iff \exists x \in X : A(x) \neq B(x).$$

z.B. $\neg(\forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{(x + 1)^2} = x + 1)$ oder äquivalent $\exists x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{(x + 1)^2} \neq x + 1$.

Beweis. (Existenzbeweis) Für $-2 \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{(-2 + 1)^2} = 1 \neq -1 = -2 + 1$. □

Alternativ:

Beweis. (Widerspruchsbeweis) Angenommen: $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{(x + 1)^2} = x + 1$
$\Rightarrow \ \sqrt{(-2 + 1)^2} = -2 + 1$, da insbesondere $-2 \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \ 1 = -1$. Widerspruch! □

Beispiel 18.3. (Verbesserung) Man kann den Individuenbereich bzw. das Prädikat ändern, um eine richtige Gleichung zu grunden:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1: \ \sqrt{(x+1)^2} = x+1 \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

18.3 Lösung einer Gleichung

Die **Lösung** einer Gleichung ist die Menge aller Elemente eines Individuenbereichs, die die Gleichung erfüllen:

$$\{x \in X \mid A(x) = B(x)\}$$

Beispiel 18.4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{3-2x}\}$.
Um diese Lösung zu bestimmen, mussen wir

a) eine konkrete Darstellung der Lösung finden (hier $\{1\}$),

b) beweisen, dass tatsächlich $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{3-2x}\} = \{1\}$ gilt.

Also, per Definition

$$\forall y: \ y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{3-2x}\} \ \Leftrightarrow \ y \in \{1\}$$

Wir zeigen die Äquivalenz durch **direktes Nachrechnen**, d.h. unter Benutzung bekannter **Äquivalenzumformungen**:

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{3-2x} &\overset{(a)}{\Longrightarrow} x^2 = 3-2x \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} x^2+2x-3=0 \\ \Longleftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 &\overset{(c)}{\Longleftrightarrow} (x+3=0) \lor (x-1=0) \\ \Longleftrightarrow (x=-3) \lor (x=1) &\overset{(d)}{\Longleftrightarrow} x \in \{-3,1\} \end{aligned}$$

Nun setzen wir die mögliche Lösungen in der Gleichung ein, und prüfen ob sie passen: $\sqrt{3-2(1)} = 1$ aber $\sqrt{3-2(-3)} = 3 \neq -3$. Daher ist -3 keine Lösung und die Lösungsmenge ist $\{1\}$. $\square$

Bemerkung 18.5. Man muss die Äquivalenz (beide Richtungen) zeigen! Nur eine reicht nicht, denn beide folgenden Aussagen sind richtig:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \ x^2 = x \ \Rightarrow \ x \in \{0,1,2\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}: \ \ x^2 = x \ \Leftarrow \ x \in \{0\},$$

aber in diesem Fall ist die Lösungsmenge $\{0,1\}$.

Äquivalenz Um eine Äquivalenz zu zeigen verwendet man die folgende Tautologie, indem man zwei Implikationen, die *Hin-* und die *Rückrichtung* zeigt:

$$(A \Leftrightarrow B) \ \Leftrightarrow \ (A \Rightarrow B) \land (A \Leftarrow B)$$

18.4 Äquivalenzumformungen

Es gibt eine ganze Zahl verschiedener **Äquivalenzumformungen**, die man zum Lösen von Gleichungen verwenden kann. Im obigen Beweis:

(b) ist eine Gleichungsumformung mit Hilfe einer Funktion.

(c) ist die Eigenschaft dass, wenn $0 = ab$, können a und b nicht beide verschieden von 0 sein.

(d) ist praktisch die Definition der Vereinigungsmenge.

Beispiel 18.6. Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \overset{\cdot(x-1)}{\Longrightarrow} x = 1$$

aber die Gleichung besitzt keine Lösung, da wir durch 0 teilen mussen! Die Umformung $\cdot(x-1)$ ist keine Äquivalenz.

Beispiel 18.7. Die Umformung (a) ist keine Äquivalenz, da wir die Funktion $(\cdot)^2$ benutzt haben, und sie ist nicht umkehrbar. Deswegen ist die falsche Lösung -3 aufgetaucht.

Wichtig: Eine Gleichungsumformung mit Hilfe einer Funktion ist nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn die Funktion *umkehrbar* ist, d.h. wenn es eine andere Funktion gibt, die

1) die Wirkung der ersten Funktion rückgängig macht

2) und die für alle Fälle der Variablen definiert ist.

Beispiel 18.8.

- Sei $x \in \mathbb{Q}$. Es gilt: $2x = x + 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{x+1}{2}$. $\quad$ ($\overset{:2}{\Rightarrow}$ und $\overset{\cdot 2}{\Leftarrow}$)
- Sei $x \in \mathbb{Q}$. Es gilt: $2 = x \;\not\Leftrightarrow\; 2x = x^2$. $\quad$ ($\overset{\cdot x}{\Rightarrow}$ aber für $\Leftarrow$ $\exists$ keine Funktion)
- Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt: $x = y \;\not\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$. $\quad$ ($\overset{(\cdot)^2}{\Rightarrow}$ aber für $\Leftarrow$ $\exists$ keine Funktion)
- Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt: $|x| = |y| \;\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$. $\quad$ ($\overset{\cdot^2}{\Rightarrow}$ und $\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftarrow}$)
- Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y < 0$. Es gilt: $x = y \;\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$. $\quad$ ($\overset{\cdot^2}{\Rightarrow}$ und $\overset{-\sqrt{\cdot}}{\Leftarrow}$)

19 Ungleichungen

Eine **Ungleichung** ist ein Prädikat der Form

$$A < B, \quad A \leq B, \quad A \geq B \quad \text{oder} \quad A > B.$$

Normalerweise sind die hier verwendeten Vergleichsoperatoren nur für Zahlen[2] definiert.

Generell behandelt man Gleichungen und Ungleichungen ähnlich. Es gibt zwei wichtige Unterschiede:

[2]Vorsicht: Nicht für alle Zahlen! (z.B. komplexe Zahlen)

Ungleichungsumkehrende und -erhaltende Äquivalenzumformungen Funktionen, mit denen man Ungleichungen umformen will, müssen entweder streng monoton wachsend (s.m.w.) oder streng monoton fallend (s.m.f.) sein.

Bemerkung 19.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend** (s.m.w.) bzw. **streng monoton fallend** (s.m.f.) falls es gilt

$$\forall x < y : f(x) < f(y) \quad \text{s.m.w.} \quad \text{bzw.} \quad \forall x < y : f(x) > f(y) \quad \text{s.m.f.}$$

Beispiel 19.2. **“** $+2$ **”** ist s.m.w. und damit gilt: $x > 1 \;\Leftrightarrow\; x + 2 > 3.$ (ungleichungserhaltend)

“ $\cdot(-2)$ **”** ist s.m.f. und damit gilt: $x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; -2x \leq -2.$ (ungleichungsumkehrend)

“ $\cdot^2$ **”** ist für negative Zahlen s.m.f. und für positive Zahlen s.m.w.

a) Für $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \leq 0$ gilt: $x < y \;\Leftrightarrow\; x^2 > y^2.$
b) Für $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 0$ gilt: $x < y \;\Leftrightarrow\; x^2 < y^2.$
c) Für $x, y \in \mathbb{R},\ x \leq 0,\ y \geq 0$ lässt sich aus $x < y$ nichts für die Quadrate folgern.

Beispiel 19.3. Wir bestimmen die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{x-1}{x+1} \leq 2x - 1$ wobei $x \in \mathbb{R}$.
Es gibt drei Fälle:

a) $(x = -1)$: Ungleichung nicht definiert.
b) $(x > -1)$: $\frac{x-1}{x+1} \leq 2x - 1 \overset{x+1>0}{\iff} x - 1 \leq (2x-1)(x+1) \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x > -1.$
c) $(x < -1)$: $\frac{x-1}{x+1} \leq 2x - 1 \overset{x+1<0}{\iff} x - 1 \geq (2x-1)(x+1) \Leftrightarrow 0 \geq 2x^2 \Leftrightarrow$ keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Es folgt dass die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ ist.

Beispiel 19.4. Sei $x \in \mathbb{R}$. Durch Äquivalenzumformungen bestimmen wir die Lösung der Ungleichung $|x - 1| < 2$:

$$\begin{aligned} |x-1| < 2 &\iff (x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < 2) \vee (x - 1 \leq 0 \wedge -(x-1) < 2) \\ &\iff (0 \leq x - 1 < 2) \vee (-2 < x - 1 \leq 0) \\ &\iff -2 < x - 1 < 2 \iff -1 < x < 3 \end{aligned}$$

Abschätzungen Das sind nichtäquivalente Umformungen zum Beweisen der Richtigkeit einer Ungleichung:

- Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt: $x > y \overset{x+1>x}{\Longrightarrow} x + 1 > y$. (Vergrößerung der größeren Seite)
- Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt: $x > y^2 \overset{y^2 \geq 0}{\Longrightarrow} x > 0.$ (Verkleinerung der kleineren Seite)

Es gibt beim Thema Abschätzen viele Tricks und bekannte Ungleichungen, die oft verwendet werden, z.B. die **Dreiecksungleichung**:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \;\; |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beispiel 19.5. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt: $x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1 + x^2}$.

Relationen

20 Motivationen

Viele Objekte haben verschiedene Darstellungen:

Beispiel 20.1 (Rationale Zahlen)**.** Jede rationale Zahl hat verschiedene Darstellungen der Form $\dfrac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Z.B. $\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{16}{20}$.

Beispiel 20.2. Sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Kreis von Radius 1 um 0. Jeder Punkt $(x_\alpha, y_\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ist durch den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben aber verschiedene Winkel stellen den selben Punkt dar (Siehe Abschnitt 14).

Z.B. $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ liefern den Punkt $(0, 1) \in E$.

I.A. liefern alle Winkel $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ den selben Punkt: $(\cos\alpha, \sin\alpha) \in E$.

Beispiel 20.3 (Uhrzeit)**.** 2 Uhr nachmittag und 14 Uhr stellen den gleichen Zeitpunkt dar.

Also stellen verschiedene Werte oft das selbe Objekt dar. Wir möchten dann diese verschiedenen Werte als "gleich" betrachten.

Dafür braucht man die *"Äquivalenzrelationen"*. Was sind diese?

Um diese zu erklären, definieren wir zuerst den Begriff *"Relation"*, und dann besprechen wir die gewünschte Eigenschaften von Relationen.

21 Definition und Beispiele

Definition 21.1. Eine **Relation** R auf einer Menge X ist ein Prädikat $P(u, v)$, dass von zwei Variablen u, v aus der Menge X abhängt.

Die Relation R hängt dann von zwei Variablen aus der Menge X ab, und kann erfüllt ("wahr") oder nicht erfüllt ("falsch") sein.

Erfüllen $a, b \in X$ die Relation R, d.h. die Aussage $P(a, b)$ ist wahr, schreibt man $a\ R\ b$, andernfalls (die Aussage $P(a, b)$ ist falsch) schreibt man $a \not R\ b$.

Beispiel 21.2. Jedes Zeichen "$<$", "$\leq$", "$=$", "$\geq$", "$>$" ist eine Relation auf $\mathbb{R}$: z.B. R ist die Relation $P(a, b) =$ "$a < b$".

Vorsicht: Die Reihenfolge der Variabeln ist wichtig. $P(1, 2) =$ "$1 < 2$" ist wahr, aber $P(2, 1) =$ "$2 < 1$" ist falsch!

Beispiel 21.3. Auf $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sei R die Relation:

$$P(x, y) = \text{"}x \text{ ist ein Teiler von } y\text{"},$$

also $P(x, y)$ ist genau dann wahr, wenn ein $z \in \mathbb{N}$ existiert, mit $y = z \cdot x$.

Dann z.B.

$$2\,R\,6\,,\quad 2\not R\,5\,,\quad 6\not R\,2\,,\quad 3\,R\,0\,,\quad 0\not R\,7\,,\quad 0\,R\,0\,,\quad 3\,R\,9\,.$$

Vorsicht: Hier ist nur die *Existenz* eines solchen $z \in \mathbb{N}$ zu berücksichtigen, nicht den Wert von $\frac{y}{x}$. Insbesondere ist $0\ R\ 0$, da z.B. $0 = 2 \cdot 0$, obwohl der Wert $\frac{0}{0}$ nicht definiert ist.

R heißt **Teilbarkeitsrelation**, und normalerweise schreibt man dafür "|", d.h.

$$2 \mid 6\,, \quad 2 \nmid 5\,, \quad 3 \mid 9\,.$$

Beispiel 21.4. Auf der Menge $X = \mathbb{Z}$ sei $R =$ "$\equiv_n$" für $n \in \mathbb{N}$ die Relation definiert durch das Prädikat

$$P(a,b) = \text{“}\underbrace{(b-a) \text{ ist durch } n \text{ teilbar}}_{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.d. } b-a=k\cdot n}\text{”}$$

Diese Relation heißt **Kongruenz modulo** n, und man schreibt: $a \equiv_n b$ oder oft $a \equiv b \mod n$ (gesprochen "a und b sind kongruent modulo n").

$$\text{Z.B.} \quad 0 \equiv_2 4\,, \quad 16 \equiv_5 1\,, \quad 2 \not\equiv 8 \mod 4.$$

Die Kongruenz modulo 12 ($\equiv_{12}$) benutzt man jeden Tag beim Rechnen mit Uhrzeiten, $14 \equiv_{12} 2$.

22 Eigenschaften

Sei R eine Relation auf einer Menge X, dann kann R die folgenden Eigenschaften erfüllen:

a) R heißt **reflexiv**, falls $\forall a \in X : a\ R\ a$.

b) R heißt **symmetrisch**, falls $\forall a, b \in X : a\ R\ b \Leftrightarrow b\ R\ a$.

c) R heißt **antisymmetrisch**, falls $\forall a, b \in X : a\ R\ b \wedge b\ R\ a \ \Rightarrow\ a = b$.

d) R heißt **transitiv**, falls $\forall a, b, c \in X : a\ R\ b \wedge b\ R\ c \ \Rightarrow\ a\ R\ c$.

Vorischt: antisymmetrisch ist nicht die Negation von symmetrisch! Es gibt tatsächlich Relationen, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sind!

Beispiel 22.1.

R	reflexiv	symmetrisch	antisymmetrisch	transitiv
"teilt"	x		x	x
$\leq$	x		x	x
$\equiv_n$	x	x		x

- Die Relation "teilt" ist:

- reflexiv: $\forall a \in \mathbb{N}$ gilt $a \mid a$, weil $a = 1 \cdot a$.
- nicht symmetrisch: z.B. $1 \mid 2$ aber $2 \nmid 1$.
- antisymmetrisch: $\forall a, b \in X : (a \mid b) \wedge (b \mid a) \ \Rightarrow\ a = b$ (Übungsblatt 5).
- transitiv: $(a \mid b) \wedge (b \mid c) \ \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ so dass, $a \cdot m = b$ und $b \cdot n = c$.
  Daraus folgt $c = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n) \Longrightarrow a \mid c$.

- Die Relation "Kongruenz modulo n" ist:

- reflexiv: $\forall a \in \mathbb{Z}$ gilt $a - a = 0 \cdot n$.
- symmetrisch: $a \equiv_n b \Leftrightarrow b - a = k \cdot n \Leftrightarrow a - b = (-k) \cdot n \Leftrightarrow b \equiv_n a$, mit $k \in \mathbb{Z}$.
- nicht antisymmetrisch: z.B. $1 \equiv_2 3$ und $3 \equiv_2 1$, aber $1 \neq 3$.
- transitiv: seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$ und $b \equiv_n c$.
  So existieren $x, y \in \mathbb{Z}$, s.d. $b - a = x \cdot n$ und $c - b = y \cdot n$.
  Daraus folgt $c - a = c - b + b - a = x \cdot n + y \cdot n = (x + y) \cdot n \Longrightarrow c \equiv_n a$.

23 Äquivalenzrelationen

Definition 23.1. Eine reflexive, symmetrische, transitive Relation "$\sim$" auf der Menge X heißt **Äquivalenzrelation auf** X.

Beispiel 23.2. Gleich sein: "=". Kongruenz modulo n: "$\equiv_n$".

Äquivalenzrelationen sind eine Verallgemeinerung der Gleichheit.

Definition 23.3. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so bezeichnet zu $a \in X$

$$[a] = \{b \in X \mid b \sim a\}$$

die **Äquivalenzklasse** von a.
Ein Element einer Äquivalenzklasse wird **Vertreter** oder **Repräsentant** genannt.

Beispiel 23.4 (Kongruenz modulo 3)**.**

$$\begin{aligned} [0] &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\} \end{aligned}$$

3 ist ein Vertreter von [0] und 7 von [1].

Definition 23.5. Eine Menge P von nicht-leeren Teilmengen einer Menge X heißt **Partition**, falls für jedes $x \in X$ genau ein $A \in P$ existiert mit $x \in A$.
M.a.W. Eine Menge $P = \{P_i\}_{i \in I}$ mit $\emptyset \neq P_i \subseteq X$ $i \in I$, ist eine Partition, falls

$$\bigcup_{i \in I} P_i = X \quad \text{und} \quad P_i \cap P_j = \emptyset\,, \text{ für } i \neq j\,.$$

Beispiel 23.6. Sei $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dann ist

$$P = \{\{1, 2, 6\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$$

eine Partition von X, aber

$$\tilde{P} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\} \text{ und } P' = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$$

sind keine Partitionen von X, weil $6 \notin (\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5\})$ bzw. $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 6\} \neq \emptyset$.

Satz 23.7. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, dann:*

a) $\forall a \in X : a \in [a]$

b) $\forall a, b \in X : a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$.

c) Die Menge $\{[a] \mid a \in X\}$ aller Äquivalenzklassen ist eine Partition von X.

Beweis.

a) Sei $a \in X$, $\sim$ ist reflexiv $\Leftrightarrow a \sim a$. Daraus folgt $a \in [a]$.

b) Seien $a, b \in X$.
$\Rightarrow$] Sei $c \in [a] \Leftrightarrow c \sim a \overset{a\sim b}{\underset{(*)}{\Longleftrightarrow}} c \sim b \Leftrightarrow c \in [b]$, also $[a] = [b]$. Die Äquivalenz $(*)$ gilt aufgrund der Transitivität von $\sim$.
$\Leftarrow$] Sei $[a] = [b]$, dann gilt $a \in [b]$: $a \sim b$.

c) Sei $a \in X \overset{\text{Teil a)}}{\Longrightarrow} a \in [a]$.
Angenommen $a \in [b] \overset{\text{Teil b)}}{\Longrightarrow} [a] = [b]$, d.h. a ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten.

□

Definition 23.8. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Die Menge $M/{\sim} := \{[a] \mid a \in M\}$ heißt **Quotientmenge**.

Beispiel 23.9. Die Kongruenz modulo 3 hat genau drei Äquivalenzklassen und

$$\mathbb{Z}/{\equiv_3} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}.$$

Analog $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Beispiel 23.10 (Rationale Zahlen)**.** Sei M die Menge $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b \neq 0\}$. Auf M sei die Relation $\sim$ gegeben:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Diese Relation ist

- reflexiv, weil $a \cdot b = b \cdot a$, also $(a, b) \sim (a, b)$ für alle $(a, b) \in M$.
- symmetrisch, weil $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow c \cdot b = d \cdot a$, also $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$ für alle $(a, b), (c, d) \in M$.
- transitiv: $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f) \iff a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$.
  Wegen $f \neq 0$ und $d \neq 0$ haben wir

  $$(a \cdot d) \cdot f = (b \cdot c) \cdot f = b \cdot (c \cdot f) = b \cdot d \cdot e \Longrightarrow a \cdot f = b \cdot e,$$

  d.h. $(a, b) \sim (e, f)$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, und die Quotientmenge $M/\sim$ entspricht der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$: $(a, b) \mathrel{\hat{=}} \frac{a}{b}$, tatsächlich gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c \iff (a, b) \sim (c, d).$$

Bemerkung 23.11. Sei $P = \{P_i\}_{i \in I}$ eine Partition der Menge X. Die Relation

$$a\ R\ b \quad \overset{def}{\iff} \quad \exists i \in I : a, b \in P_i$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 23.12. Die Partition $P := \{\{1, 2, 6\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ von $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ liefert die Äquivalenzrelation R, die graphisch in der folgenden Tabelle dargestellt werden kann:

	1	2	3	4	5	6
1	x	x				x
2	x	x				x
3			x			
4				x	x	
5				x	x	
6	x	x				x

Wir stellen ein Kreuz ins Kästchen (a, b) genau dann, wenn $a\ R\ b$ gilt, also wenn a und b zur selben $A \in P$ gehören.
Z.B. $1\ R\ 2$, $2\ R\ 1$, $2 \not R\ 4$.

24 Ordnungsrelationen

Wie gesehen, sind die Äquivalenzrelationen eine Verallgemeinerung der Gleichheit. Genauso sind die *Ordnungsrelationen eine Verallgemeinerung von* $\leq$.

Definition 24.1. Eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation R auf der Menge X heißt **Halbordnung** auf X (oder partielle Ordnung).

Zwei Elemente $a, b \in X$ heißen **vergleichbar**, falls $a \; R \; b$ oder $b \; R \; a$.

Falls je zwei Elementen vergleichbar sind, heißt R **Totalordnung**.

Beispiel 24.2. Die Relation "teilt" ist eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$, da 2 und 3 nicht vergleichbar sind: $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$.

Beispiel 24.3. $\leq$ ist eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$ (Beweisen Sie es!)

Beispiel 24.4. Sei M eine Menge, $X = \mathcal{P}(M)$ und auf X betrachte die *Inklusion*

$$A \; R \; B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

- Reflexivität: ja: $A \subseteq A$, für alle $A \subseteq M$.
- Antisymmetrie: ja: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$, für alle $A, B \subseteq M$.
- Transitivität: ja: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$, für alle $A, B, C \subseteq M$.

Funktionen-II

25 Definitionen

Wir wiederholen die Definition von *Funktion/Abbildung* (siehe Definition 12.1).

Definition 25.1. Eine **Funktion** $f : X \to Y$ besteht aus drei Komponenten: die *Definitionsmenge* X, die *Zielmenge* Y und eine *Abbildungsvorschrift* (oder *Zuordnungsvorschrift*), die jedem Element der Definitionsmenge X *genau ein* Element der Zielmenge Y zuordnet.

Die Abbildungsvorschrift erklärt, welchem Wert des **Arguments** der Funktion welcher **Funktionswert** zugeordnet wird.

26 Sonderfunktionen

a) $id_A : A \to A, x \mapsto x$ ist die **Identität** auf der Menge A.

b) $i : A \to B, x \mapsto x$ ist für $A \subseteq B$ die **Inklusionsabbildung** (oder nur Inklusion) von A in B. Man schreibt $A \hookrightarrow B$.

c) Die **Einschränkung** einer Funktion $f : B \to C$ auf einem kleineren Definitionsbereich $A \subseteq B$ ist die Funktion: $f_{|A} := f \circ i : A \to C$, wobei i wie in b) ist. Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, b \mapsto b^2$, so ist $f_{|\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,, b \mapsto b^2$ die Einschränkung von f auf $\mathbb{Z}$.

27 Eigenschaften von Funktionen

Definition 27.1. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

a) f heißt **injektiv**, falls $\forall x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
"Auf jedes Element der Zielmenge wird *höchstens* ein Element abgebildet."

b) f heißt **surjektiv**, falls $\forall y \in Y\ \exists\ x \in X$ mit $f(x) = y$.
"Auf jedes Element der Zielmenge wird *mindestens* ein Element abgebildet."

c) Ist f injektiv and surjektiv, so heißt f **bijektiv**.
"Auf jedes Element der Zielmenge wird *genau* ein Element abgebildet."

Beispiel 27.2. a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$ ist injektiv, denn sind $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_1) = f(x_2) : x_1 + 1 = x_2 + 1$ dann $x_1 = x_2$. f ist nicht surjektiv, weil es kein $x \in \mathbb{N}$ gibt, mit $f(x) = 0 \in \mathbb{N}$.

b) Die Abbildung a : Person $\to \mathbb{N}$, $a(p)$= Alter der Person p; ist weder surjektiv, da niemand 1000 Jahre alt ist, noch injektiv, da es mehrere Personen gibt, die z.B. 33 Jahre alt sind.

c) $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty), x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da z.B. $g(-2) = 4 = g(2)$, aber g ist surjektiv: sei $y \in [0, +\infty)$, dann ist $g(\sqrt{y}) = y$.

d) $h := g_{|[0,+\infty)}$ ist surjektiv (wie oben) und injektiv: sind $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ mit $g(x_1) = g(x_2) : x_1^2 = x_2^2$ dann $x_1 = x_2$, weil $x_1, x_2 \geq 0$.

Bemerkung 27.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Injektivität (bzw. Surjektivität, bzw. Bijektivität) von f kann anhand von dem Graph von f gelesen werden.

i) Die Funktion f ist genau dann *injektiv*, wenn jede waagrechte Gerade den Graph von f *höchstens* einmal schneidet.

s) Die Funktion f ist genau dann *surjektiv*, wenn jede waagrechte Gerade den Graph von f *mindestens* einmal schneidet.

b) Die Funktion f ist genau dann *bijektiv*, wenn jede waagrechte Gerade den Graph von f *genau* einmal schneidet.

28 Bijektive Abbildungen

Definition 28.1. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion.
Jedes $y \in Y$ hat dann genau ein **Urbild**, d.h. $\exists! x \in X$ mit $f(x) = y$.
Damit gibt es eine **Umkehrfunktion** (oder **inverse Funktion**): ("f invers")
$f^{-1} : Y \to X\,, y \mapsto$ (Urbild von y).

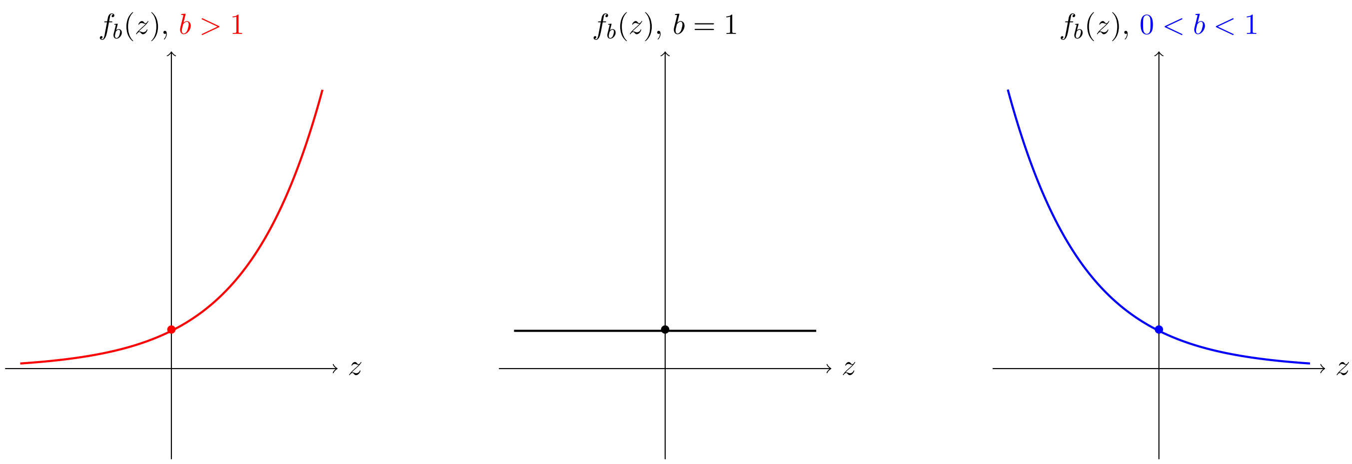
Es gilt $f \circ f^{-1} = id_Y$ und $f^{-1} \circ f = id_X$.

28.1 Beispiel: Logarithmen

Sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Sei

$$\begin{aligned} f_b : \mathbb{R} &\to (0,+\infty) \\ z &\mapsto b^z \end{aligned}$$

Der Graph von f_b ist



Für $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$ ist f_b bijektiv, dann gibt es eine Umkehrfunktion

$$f_b^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}\,,$$

die *Logarithmusfunktion* zur Basis b. Sei $x \in (0,\infty)$, $y \in \mathbb{R}$, dann

$$f_b^{-1}(x) = y \iff f_b(y) = x\,, \qquad \text{d.h. } \log_b(x) = y \iff b^y = x\,.$$

Definition 28.2. y heißt der **Logarithmus** der positiven reellen Zahl x zur Basis b, und man schreibt $y = \log_b(x)$.

Bemerkung 28.3. Direkt aus der Definition folgen die Gleichungen:

$$x = b^{\log_b(x)} = \log_b(b^x).$$

Satz 28.4 (Rechenregeln für Logarithmen)**.**
Seien $b, c, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ und $k \in \mathbb{R}$, dann gelten

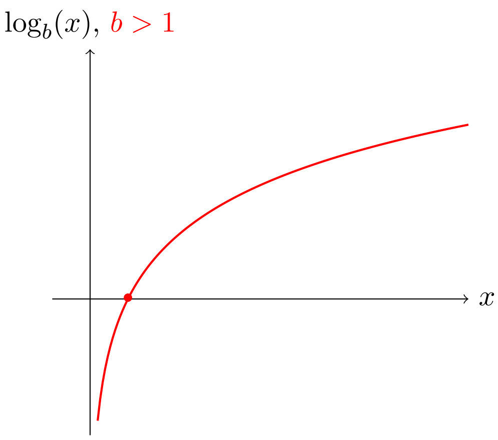
1. $\log_b(x) + \log_b(y) = \log_b(x \cdot y)$*;*
2. $\log_b(x^k) = k \cdot \log_b(x)$*;*
3. *Basiswechsel:* $\log_b(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.

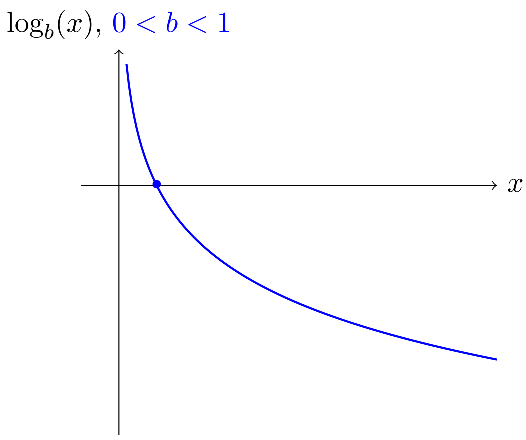
Beweis. (von 1.; Der Beweis von 2. und 3. ist analog.)

$$\left.\begin{array}{lll} \log_b(x) = p & \text{d.h.} & b^p = x \\ \log_b(y) = q & \text{d.h.} & b^q = y \\ \log_b(x \cdot y) = s & \text{d.h.} & b^s = x \cdot y \end{array}\right\} \text{ Daraus folgt: } \; b^{p+q} = b^p \cdot b^q = b^s$$

Also gilt $s = p + q$, d.h. $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$. $\square$

Die Funktion $\log_b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ hat dann den Graph:





28.2 Permutationen

Definition 28.5. Eine bijektive Funktion $\sigma : X \to X$ einer (endlichen) Menge auf sich selbst nennt man **Permutation**.

Permutationen kann man durch Wertetabellen angeben.

Beispiel 28.6. Alle Permutationen auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 28.7. *Sei $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Menge mit n Elemente.*
Auf X gibt es genau $n!$ Permutationen.

Beweis. Es reicht die injektiven Abbildungen zu zählen, denn ist $\sigma : X \to X$ injektiv, so sind alle n Bildern $\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)$ verschieden, und deswegen sind alle n Elemente von X im Bild $\mathrm{Im}(\sigma)$. Damit ist σ auch surjektiv, und damit bijektiv.

Sei $\sigma : X \to X$ injektiv, dann gibt es für $\sigma(x_1)$ genau n Möglichkeiten. Aufgrund der Injektivität gibt es: für $\sigma(x_2)$ genau $(n-1)$ Möglichkeiten $(\sigma(x_1) \neq \sigma(x_2))$, dann für $\sigma(x_3)$ genau $(n-2)$ Möglichkeiten $(\sigma(x_1) \neq \sigma(x_3) \neq \sigma(x_2))$, und so weiter.

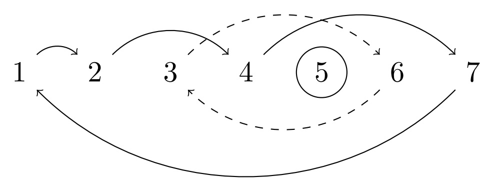
Insgesamt gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für σ. $\square$

Bemerkung 28.8. Im Beweis wurde gezeigt, dass jede injektive Abbildung auf einer *endlichen* Menge automatisch surjektiv ist, und damit bijektiv.

Analog ist eine surjektive Abbildung auf einer *endlichen* Menge automatisch injektiv, und damit bijektiv. (Beweisen Sie es!)

Eine praktische Kurzschrift ist die **Zykelschreibweise**:

Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:



$$\Longrightarrow \quad \sigma = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

σ besteht aus dem **Zykel** $(1, 2, 4, 7)$ der Länge 4, dem Zykel $(3, 6)$ der Länge 2, dem Zykel (5) der Länge 1.

Zykel der Länge 1 heißen auch **Fixpunkte** und können in der Schreibweise weggelassen werden:

$$\Longrightarrow \quad \sigma = (1, 2, 4, 7)(3, 6) = (3, 6)(2, 4, 7, 1).$$

29 Mengenweises Anwenden von Funktionen

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Um f auf mehrere Elemente gleichzeitig anzuwenden, definiert man für $A \subseteq X$ das **mengenweise Bild** $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$.

Ist $B \subseteq Y$, so definiert man das **mengenweise Urbild** von B als die Menge $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$. Wenn B auf einen einzigen Element b besteht (d.h. $B = \{b\}$), schreibt man einfach $f^{-1}(b) := \{x \in X \mid f(x) = b\}$.

Achtung: Dies ist auch definiert, wenn es keine inverse Funktion gibt!

Falls es f bijektiv ist, also falls es eine Umkehrfunktion gibt, ist dies das mengenweise Bild der inversen Funktion.

Beispiel 29.1. a) Sei $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d, e\}$ durch die folgende Wertetabelle gegeben:

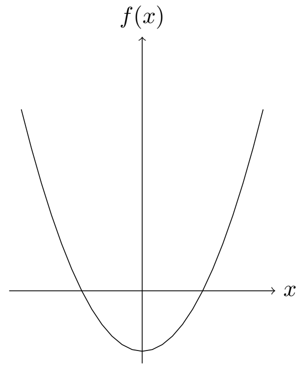
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	a	a	c	d	c

Dann

- $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$
- $f(4) = \{d\}$
- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $f^{-1}(a) = \{1, 2\}$
- $f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 3, 5\}$
- $f^{-1}(b) = \emptyset$

Beispiel 29.2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$. Dann

- $g(\{-1, 1, -3\}) = \{0, 8\}$
- $g(]1, 2[) =]0, 3[$
- $g(] - 3, 4[) = [-1, 15[$
- $g^{-1}(4) = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- $g^{-1}(] - 2, 3[) =] - 2, 2[$
- $g^{-1}(]0, 3[) =] - 2, -1[\cup]1, 2[$



Komplexe Zahlen

"Das Unmögliche zu schaffen, gelingt einem nur, wenn man es für möglich befindet." — der verrückte Hutmacher, *Alice im Wunderland*

30 Komplexe Zahlen

Problem: Viele Polynomgleichungen haben in $\mathbb{R}$ keine Lösung, z.B. $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$.
Eine Idee: Angenommen "i" ist eine "Zahl" mit $\mathrm{i}^2 = -1$, kann man damit sinnvoll Mathematik betreiben?

Komplexe Zahlen haben die Form $z = a + \mathrm{i}b$, wobei a und b reelle Zahlen sind, und i die **imaginäre Einheit** ist: $\mathrm{i}^2 = -1$. Die Menge der komplexe Zahlen ist

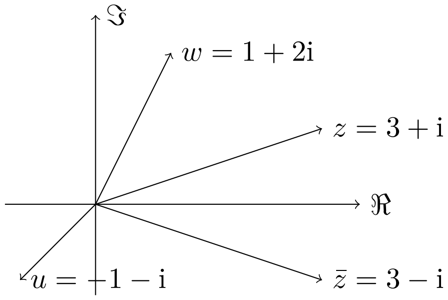
$$\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Definition 30.1. Sei $z := a + \mathrm{i}b$ eine komplexe Zahl.
$\Re(z) := a$ heißt der **Realteil** von z und $\Im(z) := b$ heißt der **Imaginärteil** von z.
Die komplexe Zahl $\bar{z} := a - \mathrm{i}b$ heißt die zu z **komplex konjugierte Zahl** (oder das Konjugierte).

Bemerkung 30.2. Seien $z, w \in \mathbb{C} : z = w \Leftrightarrow \Re(z) = \Re(w)$ und $\Im(z) = \Im(w)$.

31 Komplexe Zahlenebene

Man kann $\Re(z)$ und $\Im(z)$ als Koordinaten in der Ebene interpretieren: **Komplexe ebene**. (Idee vom Argand, Gauß.)



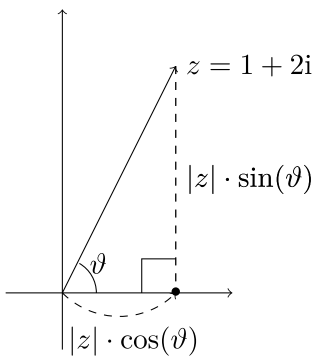
Das komplex konjugierte $\bar{z} := a - \mathrm{i}b$ entsteht durch Spiegelung an der x-Achse.

31.1 Polarkoordinaten

Sei $z := a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Der **Betrag** von z ist $|z|$ der Abstand zum Ursprung.

$$\begin{aligned} |z| &\overset{Pytagoras}{=} \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\overset{3.bin.\ Formel}{=} \sqrt{(a + \mathrm{i}b)(a - ib)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0 \end{aligned}$$

und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.



Z.B. $|z| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$
und $\theta = \arg(z)$

Das **Argument** von $z \neq 0$ ist $\arg(z)$ der Winkel zur x-Achse.
(Meist fordert man $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$, aber das ist eine Konventionssache.)
Damit ist $z = |z|(\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z)))$.

Beispiel 31.1. Sei $z = 1 + \mathrm{i}$, dann ist $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, und $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (Winkelhalbierende):

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i\,.$$

32 Rechnen mit der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

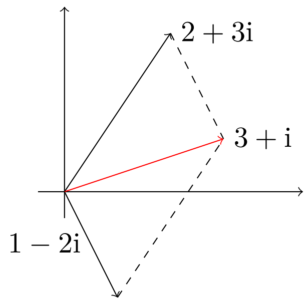
32.1 Addition/Subtraktion

Bei der **Addition** werden komplexe Zahlen komponentenweise addiert (genauso bei der **Subtraktion**):

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)\,.$$

Z.B. $(2 + 3\mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i}) = (2 + 1) + \mathrm{i}(3 - 2) = 3 + \mathrm{i}$.

$(2 + 3\mathrm{i}) - (1 - 2\mathrm{i}) = (2 - 1) + \mathrm{i}(3 + 2) = 1 + 5\mathrm{i}$.



Der Betrag erfüllt die *Dreiecksungleichung*: für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.

32.2 Multiplikation

Zur **Multiplikation** verwende $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) = a \cdot c + a \cdot \mathrm{i}d + \mathrm{i}b \cdot c + \underbrace{\mathrm{i}b \cdot \mathrm{i}d}_{\mathrm{i}^2 bd = -bd} = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)\,.$$

Z.B. $(2 + 3\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i}) = 2 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2 = 2 - \mathrm{i} + 6 = 8 - \mathrm{i}$.
Es folgt direkt aus dieser Definition, dass $|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

32.3 Division

Zur **Division** benutze die 3. binomische Formel: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 + y^2$.

$$\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}\,, \text{ für } c + id \neq 0\,.$$

Z.B. $\frac{(2+3\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})} = \frac{(2+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{2+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{1-4\mathrm{i}^2} = \frac{-4+7\mathrm{i}}{5} = -\frac{4}{5} + \mathrm{i}\frac{7}{5}$.

Bemerkung 32.1.

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \Re(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} = \Im(z)$$

Man sieht, dass die Ergebnisse der Grundrechenarten sich immer auf die Form $x + \mathrm{i}y$ bringen lassen.

32.4 Natürliche Wurzeln

Sei $w \in \mathbb{C}$ und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, die **natürlichen Wurzeln** von w sind Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$. Diese lassen sich über Gleichungssysteme bestimmen.

Beispiel 32.2. Gesucht z mit $z^2 = \mathrm{i}$. Sei $z = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$, dann

$$\begin{aligned}
z^2 = \mathrm{i} \iff{}& \mathrm{i} = (a+\mathrm{i}b)^2 = (a^2 - b^2) + \mathrm{i}(2ab) \\
\iff{}& (a-b)(a+b) = 0 \wedge 2ab\mathrm{i} = \mathrm{i} \\
\iff{}& \left\langle \begin{array}{ll} a = b \wedge 2a^2 = 1 & \text{oder} \\ a = -b \wedge 2a^2 = -1 & \text{nicht möglich, da } a \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\iff{}& a = b \wedge \left\langle \begin{array}{ll} a = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{oder} \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \end{array} \right. \\
\iff{}& z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

33 Komplexe Exponentialfunktion - Eulersche Formel

In Analysis 1 wird man sehen: Die einzige Art und Weise, die Exponentialfunktion $\exp : z \mapsto e^z$ auf komplexe Zahlen zu erweitern. Insbesondere gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$;

b) $(e^z)^n = e^{nz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$;

c) $e^0 = 1$, und $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

d) (*Eulersche Formel*) $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hierbei ist e die Eulersche Zahl ($e \approx 2,71828...$, $e \notin \mathbb{Q}$).

Bemerkung 33.1. Die Zahl e ist eine *transzendente Zahl*.
Eine reelle Zahl t heißt **transzendent**, wenn kein Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$) existiert mit $p(t) = 0$, also ist sie nicht Nullstelle eines Polynom (vom Nullpolynom verschiedenen) mit ganzzahligen Koeffizienten.

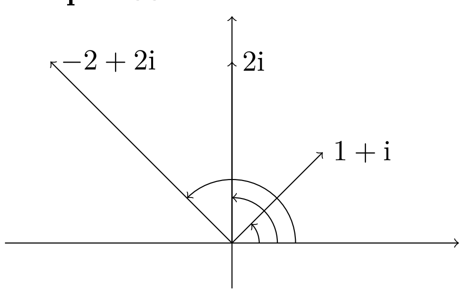
Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ gilt dann $z = |z| \cdot e^{\mathrm{i}\arg(z)}$.

Das liefert die geometrische Interpretation der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen. Multipliziert man zwei Zahlen, so erhält man

$$|z_1 \cdot z_2| \cdot e^{\mathrm{i}(\arg(z_1 \cdot z_2))} = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{\mathrm{i}\arg(z_1)} \cdot |z_2| \cdot e^{\mathrm{i}\arg(z_2)} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{\mathrm{i}(\arg(z_1) + \arg(z_2))}$$

Komplexe Multiplikation bedeutet also, dass die Beträge multipliziert werden und die Winkel addiert werden.

Beispiel 33.2.



Algebraisch: $(1+\mathrm{i}) \cdot 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -2 + 2\mathrm{i}$.

Geometrisch: $(1+\mathrm{i}) \cdot 2\mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2 + 2\mathrm{i}$.

33.1 Trigonometrische Anwendungen

Satz 33.3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gelten:*

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,,\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\,.\end{aligned}$$

Beweis. Nach der Eulerschen Formel bekommt man $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}(a+b)} &= \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)\\ e^{\mathrm{i}a} \cdot e^{\mathrm{i}b} &= (\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)) \cdot (\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b))\\ &= \cos(a)\cos(b) + \mathrm{i}\sin(a)\cos(b) + \mathrm{i}\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $e^{\mathrm{i}(a+b)} = e^{\mathrm{i}a} \cdot e^{\mathrm{i}b}$ folgen die gewünschten Gleichungen:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,, \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\,.$$

□

Mithilfe der eulerschen Formel kann man auch spezielle Werte von Sinus und Kosinus berechnen.

Beispiel 33.4. $\sin(\frac{\pi}{4})$ und $\cos(\frac{\pi}{4})$.
Sei $z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = a + \mathrm{i}b = \cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})$.

Ansatz: Potenziere diese Gleichung, bis man auf einer bekannten Wert stößt. Hier sind $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ bekannt.

$$z^2 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$$

Aus dem Beispiel 32.2 wissen wir, dass $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ist. Da $\cos(\frac{\pi}{4})$ positiv ist, bekommt man

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Mächtigkeit und Abzählbarkeit

34 Mächtigkeit

Sei M eine Menge. Dann bezeichnet die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

Beispiel 34.1.

- $|\{2, 4, 1, 7, -1\}| = 5$, $|\{2, \text{Hund}, \text{Rakete}\}| = 3$.
- $|\{3, 6, \text{Banane}, 3\}| = 3$, da Wiederholungen unerheblich sind, also wird 3 nur einmal gezählt.
- $|\emptyset| = 0$ (die leere Menge ist die einzige Menge mit keinem Element).

a) $|\{1, \text{Haus}, \alpha, \mathbb{Z}\}| = 4$. **Wichtig**: Obwohl die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eine unendliche Menge ist, zählt es hier als ein Element!

- $|\{1, 2\} \times \{2, 3\}| = 4$, $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})| = 8$.

Satz 34.2 (Rechnenregeln)**.** *Seien $A, B, A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen und $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Dann*

a) Falls $A \subseteq B$, dann ist $|A| \leq |B|$.

b) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

c) $|A \times B| = |A| \cdot |B|, \quad |A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|, \quad |A^m| = |A|^m.$

d) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
(Aus diesem Grund schreibt man die Potenzmenge von A auch 2^A.)

Beweis. a) Da A eine Teilmenge von B ist, sind alle Elemente von A ebenfalls Elemente von B, also gilt $|A| \leq |B|$.

b) Die Menge $A \cup B$ besteht aus Elementen von A oder B. Also hat sie höchstens $|A| + |B|$ Elemente.
Die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, wurden doppelt gezählt, also wird die Zahl $|A| + |B|$ durch die Subtraktion von $|A \cap B|$ korrigiert.

c) Die Menge $A \times B$ besteht aus allen Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Da es $|A|$ Möglichkeiten für a und $|B|$ Möglichkeiten für b gibt, hat die Menge $A \times B$ Kardinalität $|A| \cdot |B|$.

d) Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion. Die Aussage lässt sich folgendermaßen umformulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; (\forall A \text{ endliche Menge}, \; |A| = n : \; |\mathcal{P}(A)| = 2^n).$$

IA: $(n = 0)$ Zuerst beweisen wir, dass die Gleichung für A gilt, wobei A eine Menge mit $|A| = 0$ ist.

Sei A eine Menge mit $|A| = 0$, also $A = \emptyset$. Dann $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ und so

$$|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}.$$

IS: $(n \to n+1)$ Hier nehmen wir an, dass die Gleichung für $|A| = n$ gilt, und wir zeigen, dass sie für $|A| = n+1$ gilt.

Also gelte $|\mathcal{P}(B')| = 2^n$ für jede Menge B' mit $|B'| = n$, und sei B eine Menge mit $|B| = n+1$. Wir müssen zeigen, dass $|\mathcal{P}(B)| = 2^{n+1}$.

Sei $x \in B$ und $B' := B \setminus \{x\}$. Es gilt dann $|B'| = n$, und damit $|\mathcal{P}(B')| = 2^n$. Sei nun $M \in \mathcal{P}(B)$:

Fall 1: $x \notin M$, dann $M \in \mathcal{P}(B')$.

Fall 2: $x \in M$, dann $M' := M \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(B')$, also $M = M' \cup \{x\}$.

Daraus folgt, dass

$$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(B') \cup \{M' \cup \{x\} \mid M' \in \mathcal{P}(B')\}.$$

Da "$\supseteq$" auch gilt, bekommen wir

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B') \cup \{M' \cup \{x\} \mid M' \in \mathcal{P}(B')\}.$$

Die zwei rechten Mengen sind disjunkt, dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(B)| &= |\mathcal{P}(B')| + |\{M' \cup \{x\} \mid M' \in \mathcal{P}(B')\}| \\ &= |\mathcal{P}(B')| + |\mathcal{P}(B')| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

□

35 Abzählbarkeit

Definition 35.1. Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Definition 35.2. Eine Menge M heißt **abzählbar unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Eine unendliche Menge die nicht abzählbar unendlich ist, heißt **überabzählbar**.

Eine Menge ist also überabzählbar, wenn ihre Kardinalität größer als die von $\mathbb{N}$ ist.

Beispiel 35.3.

- $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{a, b, c\}$ sind gleichmächtig, z.B.

x	1	2	3
$f(x)$	b	a	c

- Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.
Z.B.die Menge der positiven gerade Zahlen $G := \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ist abzählbar unendlich: $g : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv.

- Die Menge $\mathbb{Z}$ der der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich:

x	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(x)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	$\cdots$

- Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationellen Zahlen ist abzählbar unendlich (Cantors erstes Diagonalargument).

- Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar (Cantors zweites Diagonalargument).

Satz 35.4. *Seien $A, B, A_1, \ldots, A_n$ abzählbar unendliche Mengen. Dann sind die Mengen*

$$A \cup B, \quad A \times B, \quad A_1 \times \cdots \times A_n, \quad A^m \ (m \in \mathbb{N}, m > 0)$$

ebenfalls abzählbar unendlich.

Dagegen ist die Menge $\mathcal{P}(A)$ überabzählbar.

Beispiel 35.5. Die Mengen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^n$ sind abzählbar.

Kombinatorik

Kombinatorik beschäftigt sich insbesondere mit dem Zählen von Objekten mit bestimmten Eigenschaften.

36 Doppeltes Abzählen

Wir wissen schon:

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, für A, B endliche Mengen;
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, für eine endliche Menge A;
- auf einer n-elementigen Menge A (d.h. $|A| = n$) gibt es $n!$ Permutationen.

Weitere Resultate kann man erhalten, indem man Mengen auf mehr als eine Weise zählt:

Beispiel 36.1. Ein Fußball hat 20 Sechsecke und 12 Fünfecke.
Wie viele Kanten (=gerade Nähte) hat ein Fußball?

Wir untersuchen die Mächtigkeit von

$$X := \{(F, K) \in \text{Flächen } \times \text{ Kanten} \mid F \text{ grenzt an } K\}$$

auf zwei Arten:

a) Jede Kante grenzt an 2 Flächen: $|X| = 2n$, wobei n die Kantenzahl ist.

b) Jedes Sechseck hat 6 Kanten und jedes Fünfeck hat 5 Kanten, so $|X| = 6 \cdot 20 + 12 \cdot 5 = 180$.

Dann gilt $180 = 2n$ also $n = 90$.

37 Binomialkoeffizienten und Wahrscheinlichkeit

Wir wiederholen die Definition von Binomialkoeffizient (Definition 2.5).

Definition 37.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$. Der **Binomialkoeffizient** "k aus n" ist definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Dieser hat die folgende Bedeutung:

Satz 37.2. *Sei X eine n-elementige Menge und $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von X ist $\binom{n}{k}$:*

$$Z := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = k\}\,, \qquad |Z| = \binom{n}{k}$$

(man kann auf $\binom{n}{k}$ Arten k Elemente auswählen).

Beweis. Zuerst zählt man alle geordneten Tupel von k paarweise verschiedenen (ohne Wiederholung) Elementen (also besondere Elemente von X^k).

Es gibt n Möglichkeiten für das erste Element, $(n-1)$ Möglichkeiten für das zweite Element, $(n-2)$ für das dritte Element, und so weiter; schließlich gibt es $(n-k+1)$ Möglichkeiten für das k-te Element. Insgesamt gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k-elementige Liste (ohne Wiederholung) von Elementen aus X.

Jede Liste kann auf $k!$ Weise permutiert werden, d.h. jeweils $k!$ Listen liefern die gleiche Teilmenge.

Daraus folgt, dass X genau $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen hat. $\square$

Beispiel 37.3. *6 Richtige im Lotto 6 aus 49.*
Die Zahl der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$ ist $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt also

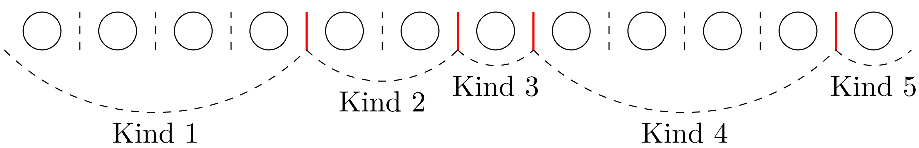
$$\frac{1}{13983816} \approx 0,0000071\%\,.$$

Beispiel 37.4. *4 Richtige im Lotto 6 aus 49.*
4 unserer Zahlen gehören zu den 6 Richtigen: $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten.
2 unserer Zahlen gehören zum Rest: $\binom{49-6}{2} = \frac{43 \cdot 42}{2} = 903$ Möglichkeiten.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0,097\%\,.$$

Beispiel 37.5. *Wie viele Möglichkeiten gibt es um 12 identische Murmeln an 5 Kindern zu verteilen, wenn jedes Kind mindestens 1 Murmel erhält?*

Wir möchten 4 Trennstellen(“|”) so setzen, dass das erste Kind die erste Menge von Murmeln bekommt, das zweite Kind die zweite Menge, und so weiter, z.B.



Es gibt $12 - 1 = 11$ mögliche Trennstellen also haben wir

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{4! \cdot 7!} = 330$$

Möglichkeiten, um 4 Trennstellen zu setzen.

Beispiel 37.6. *Wie im Beispiel 37.5, wenn die Kinder auch keine Murmel bekommen können.*

Verteile $12 + 5 = 17$ Murmeln wie im Beispiel 37.5, anschließend gibt jeder eine Murmel ab: $\binom{17-1}{4} = 1820$ Möglichkeiten.

Anhang 1: Axiomensysteme

Wie erklärt man einem Außerirdischen, was die natürlichen Zahlen sind? Oder eine Menge? Dafür sind Axiomensysteme hilfreich.

Axiome sind Aussagen, die wir immer für wahr halten, ohne Beweis. Eine mathematische Theorie ist dann ein System von Axiomen zusammen mit allen Definitionen und Sätzen, die wir daraus herleiten können.

Also, der Alien braucht nur etwas Logiksprache zu verstehen, die Axiome aufzuschreiben, und dann geht es los mit Mathe! In diesem Abschnitt werden einige Axiomensysteme untersucht, um einen Eindruck zu vermitteln, wie man die Mathematik ausgehend von Axiomen entwickeln kann. Achtung: Es ist nicht so einfach und deswegen ist es gut, dass wir viele mathematische Kompetenzen schon erworben haben.

38 Peano Axiome der natürlichen Zahlen

Die **Peano Axiome** sind ein Axiomensystem für $\mathbb{N}$. Es gibt insgesamt fünf Axiome:

> **Axiom P0** $0 \in \mathbb{N}$.
>
> **Axiom P1** Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt einen **Nachfolger** n' von n d.h. $n' \in \mathbb{N}$. (Wir bezeichnen $0'$ mit dem Symbol 1).
>
> **Axiom P2** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n' \neq 0$.
>
> **Axiom P3** Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $m' = n' \Rightarrow m = n$.
>
> **Axiom P4** Ist $0 \in X \subset \mathbb{N}$ und $n \in X \Rightarrow n' \in X$, dann ist $X = \mathbb{N}$.

Bemerkung 38.1 (nur für Aliens). Den Nachfolger von 1 bezeichnen wir mit dem Symbol 2. Auch $3 := 2'$, $4 := 3'$ usw.

Das letzte Axiom P4 ist für vollständige Induktion wichtig:

Satz 38.2 (Vollständige Induktion)**.** *Sei $P(n)$ ein Prädikat für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $P(0)$ gilt und $P(n) \Rightarrow P(n')$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ gilt}\}$. Aus P4 folgt $X = \mathbb{N}$. □

Die **Addition** und **Multiplikation** sind dann induktiv definiert für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$n + 0 = n, \qquad m + n' = (m + n)', \qquad m \cdot 0 = 0, \qquad m \cdot n' = m \cdot n + m.$$

Bemerkung 38.3. Es ist noch unklar, ob fundamentale Folgerungen wie $m + n = n + m$, $(m + n) + p = m + (n + p)$, $m \cdot n = n \cdot m$ usw. gelten.

Beispiel 38.4. $3 + 4 = 3 + 3' = (3 + 3)' = (3 + 2')' = (3 + 2)'' = (3 + 1')'' = (3 + 1)''' = (3 + 0')''' = (3 + 0)'''' = 3'''' = 4''' = 5'' = 6' = 7$

Aufgaben Zeigen Sie, nur mit Hilfe der Axiome und der Definition von Addition bzw. Multiplikation, dass die folgenden Aussagen gelten:

a) $2 + 5 = 7$; $3 \cdot 2 = 6$; $1 + 1 = 2$

b) $\forall m \in \mathbb{N} : m' = m + 1$; $\forall m \in \mathbb{N} : m \cdot 1 = m$

c) $\forall m, n, k \in \mathbb{N} : m + k = n + k \Rightarrow m = n$

d) $\forall n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$ (Hinweis: die Reihenfolge ist wichtig! Betrachten Sie zuerst $n + 0'$ und verwenden Sie Axiom P3)

e) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n = n + m$

f) Jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element (Hinweis: Induktion).

39 Zermelo–Fraenkel Mengenlehre

Wir untersuchen die Axiome der Zermelo–Fraenkel Mengenlehre[3]. Hier wird keine Menge definiert, sondern die Axiome werden erklärt und damit wird der Begriff konkretisiert.

39.1 Axiome ZF1–ZF6

Die ersten sechs Axiome haben wir in Abschnitt 7–9 schon gesehen. Das erste Axiom ist die Definition der Gleichheit zweier Mengen X und Y:

> **Axiom ZF1** Seien X und Y Mengen. Es gilt: $\forall z \ (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y$.

Beispiel 39.1. Die Mengen $\{x, y\}$, $\{x, x, y\}$, $\{x, y, x, y, y\}$ sind gleich.

Das zweite ist die Definition einer Menge durch Prädikate:

> **Axiom ZF2** Sei Z eine Menge und P ein Prädikat. Dann ist $Y = \{x \mid x \in Z \wedge P(x) \text{ gilt}\}$ eine Menge.

Bemerkung 39.2. In ZF2 ist die Obermenge Z wichtig.

- Sei $\mathcal{R} = \{X \mid X \notin X\}$, die **Russellsche Antinomie**. Dann gilt $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ und $\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Daher ist $\mathcal{R}$ keine Menge.
- Sei nun $\mathcal{U} = \{X \mid X = X\}$, das **Universum**. Wenn $\mathcal{U}$ eine Menge wäre, dann könnten wir durch ZF2 die obige Menge $\mathcal{R} = \{X \mid (X \in \mathcal{U}) \wedge (X \notin X)\}$ konstruieren. Aber $\mathcal{R}$ ist doch keine Menge! Dann ist $\mathcal{U}$ auch keine Menge.

Die $\mathcal{U}$ und $\mathcal{R}$ sind echte **Klassen** d.h. etwas allgemeiner als Mengen.

Beispiel 39.3. Aus ZF1 und ZF2 folgt dass, wenn A und B Mengen sind, ist $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ eine Menge und eindeutig definiert.

> **Axiom ZF3** Sei $\emptyset := \{X \mid X \neq X\}$. Dann ist $\emptyset$ eine Menge.

Also, es gibt mindestens eine Menge!

Eine beliebige Vereinigung von Mengen ist wieder eine Menge:

[3] Alternativ kann man z.B. die Neumann–Bernays–Gödel Axiome benutzen.

Axiom ZF4 Seien X_i Mengen für alle $i \in I$ wobei I eine beliebige Menge ist. Dann ist $\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \mid \exists i\ x \in X_i\}$ eine Menge.

Axiom ZF4 folgt *nicht* aus ZF2, weil es in ZF4 keine Obermenge Z gibt.
Die Potenzmenge ist immer eine Menge:

Axiom ZF5 Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$ eine Menge.

Eine Paarenmenge ist immer eine Menge:

Axiom ZF6 Seien X, Y Mengen. Dann ist $\{X, Y\}$ eine Menge.

Beispiel 39.4.

- Axiom ZF1 impliziert $\{A, A\} = \{A\}$
- Aus ZF6 definieren wir das geordnete Paar: $(A, B) := \{A, \{A, B\}\}$.
- Es ist noch unklar, ob das kartesische Produkt zweier Mengen wieder eine Menge ist! Die folgende Definition ist eine Menge, nach ZF2 und ZF5:

$$A \times B := \big\{X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A \exists b \in B : X = \{a, \{a, b\}\}\big\}$$

Bis jetzt kann der Alien Mengen mit null: $\emptyset$, einem: $\{A\}$, oder zwei: $\{A, B\}$ Elementen konstruieren. Durch Verknüpfungen $\cup$, $\cap$, $\times$ und auch Teilmengen und Potenzmengen davon, kann er ganz viele Mengen erzeugen. Er kann auch entscheiden, ob zwei Mengen gleich sind oder nicht.

Aufgaben zu ZF1–ZF6

a) Seien A, B Mengen. Warum ist $A \setminus B$ eine Menge?

b) Seien A, B Mengen und $a, c \in A$, $b, d \in B$ beliebige Elemente. Zeigen Sie:

   i) Für alle geordnete Paaren (a, b) und (c, d) gilt:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

   ii) Das geordnete Paar (a, b) ist Element der Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

39.2 Axiome ZF7–ZF10

Die letzten vier Axiome sind etwas komplizierter. Aus Axiom ZF7 kann der Alien zum ersten Mal einige unendliche Menge konstruieren.

Axiom ZF7 Es gibt eine Menge X, die $\emptyset$ enthält, und für alle $Y \in X$ gilt $Y \cup \{Y\} \in X$.

Das Element $Y \cup \{Y\}$ nennt man den *Nachfolger* von Y. Das Axiom lässt uns z.B. die näturlichen Zahlen konstruieren. Siehe nächster Abschnitt.

Axiom ZF8 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Es gibt $A \in X$ so, dass für alle $B \in X$ gilt $B \notin A$.

Dies ist eine Regularitätsbedingung. Wir wollen nicht, dass solche Kreise von Elementen in einer Menge vorkommen:

$$A \in A \quad \text{oder} \quad A \in B \in A \quad \text{oder} \quad A \in B \in C \in A$$

Das ergibt Sinn, weil sonst $X = \{X\}$ eine Menge wäre. Dann hätten wir $X = \{X\} = \{\{X\}\} = \{\{\{X\}\}\} = \ldots$!
Es gibt eine Verallgemeinerung von ZF2:

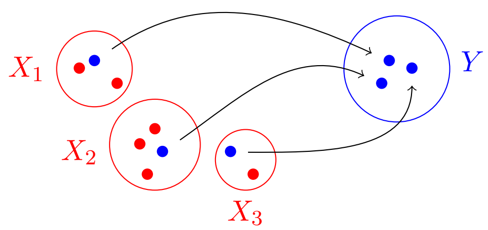
> **Axiom ZF9** Sei $P(X,Y)$ ein Prädikat, dass die folgende Bedingung erfüllt: Ist X eine Menge, so gibt es genau eine Menge Y so, dass $P(X,Y)$ gilt. Sei A eine Menge. Dann ist $\{Y \mid X \in A \wedge P(X,Y) \text{ gilt}\}$ eine Menge.

Ungefähr geschrieben: es gibt eine "Funktion" $F_P \colon X \mapsto (Y \text{ wobei } P(X,Y) \text{ gilt})$. Das "Bild" von der Menge A unter F_P ist eine Menge. Aber F_P ist keine echte Funktion, weil der Zielbereich von F_P nicht unbedingt eine Menge ist. Dieses ist ein unendliches Schema von Axiomen, eins für jedes Prädikat. Es ist oft schneller, ZF9 statt ZF2 zu verwenden:

Beispiel 39.5 (Kartesische Produkt II)**.** Seien A, B zwei Mengen. Für alle $a \in A$ ist $\{a\} \times B := \{y \mid \exists b \in B : y = (a,b)\}$ eine Menge nach ZF9. Dann ist $A \times B = \bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B)$.

Auch wichtig ist das **Auswahlaxiom**:

> **Axiom ZF10** Seien $X_i \neq \emptyset$ paarweise disjunkte Mengen für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Menge ist. Es gibt eine Menge Y die genau ein Element aus jedem X_i enthält.



Das Auswahlaxiom ist unabhängig von ZF1–ZF9, und ganz stark. Äquivalente Sätze sind: Wohlordnungssatz, Zornsches Lemma, jeder Vektorraum hat eine Basis. Es gibt seltsame Konsequenzen des Axioms ZF10 und daher gibt es Mathematiker, die vermeiden, ZF10 zu verwenden.

Beispiel 39.6 (B. Russell)**.**

a) Herr Schumann ist Schuhverkäufer mit unendlich vielen Schuhen im Vorrat. Er will ein Schuh von jedem Paar ins (sehr großen) Schaufenster stellen. Wie kann Herr Schumann unendlich viele Male einen Schuh von zwei auswählen? Das geht ohne das Auswahlaxiom, wenn er immer den linken Schuh auswählt. Er hat eine unendliche Auswahl in eine endliche Auswahl verwandelt, indem er nur zwischen links und rechts entscheiden muss.

b) Frau Langstrumpf ist Sockenverkäuferin mit unendlich vielen *ununterscheidbaren* Sockenpaaren im Vorrat. Sie will auch eine Socke von jedem Paar auswählen. Kann sie auch ohne das Auswahlaxiom vorgehen?

Aufgaben zu ZF7–ZF10

a) Zeigen Sie, dass es keine Menge A gibt mit $A \in A$. (Hinweis: ZF8 mit der Menge $\{A\}$).

b) Zeigen Sie, dass es keine Mengen A, B gibt mit $A \in B \in A$. (Hinweis: ZF8 mit der Menge $\{A, B\}$).

c) Betrachten Sie die folgende Äquivalenzrelation R auf $\mathbb{R}$

$$x \; R \; y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Kann man einen Repräsentanten für *jede* äquivalenz Klasse auswählen? Braucht man ZF10 dafür?

d) Gleiche Aufgabe wie c) mit $x \; R \; y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

40 Von Neumanns natürliche Zahlen und die Peano Axiome

Die kleinste Menge, die dem Unendlichkeitsaxiom ZF7 entspricht, ist

$$\mathcal{N} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}.$$

Nach **von Neumann** identifizieren wir diese Menge $\mathcal{N}$ mit $\mathbb{N}$, den natürlichen Zahlen:

$$\begin{array}{llll} 0 & := \emptyset & & \\ 1 & := 0' & = 0 \cup \{0\} & = \{\emptyset\} \\ 2 & := 1' & = 1 \cup \{1\} & = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 & := 2' & = 2 \cup \{2\} & = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \quad \text{usw.} \end{array}$$

Der Nachfolger von n ist $n' = n \cup \{n\}$. Insbesondere haben wir $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$.
Man kann zeigen, dass die von Neumann Zahlen $\mathcal{N}$ die Peano Axiome erfüllen. Die Existenz von $\mathbb{N}$ als Menge ist damit bewiesen!

Aufgaben

a) Zeigen Sie, dass für alle von Neumann Zahlen n gilt: $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}$. Jede von Neumann Zahl n hat genau n Elemente.

b) Aus Aufgabe a) folgt, dass $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in 4 \dots$ gilt. Warum ist das kein Widerspruch zum Regularitätsaxiom ZF8?

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}$ die Axiome P0, P1, P2 erfüllt.

d) Wir zeigen dass Axiom P4 für $\mathcal{N}$ gilt. Sei $X \subset \mathcal{N}$ mit $\emptyset \in X$ und $n \in X \Rightarrow n' \in X$. Warum ist dann $\mathcal{N} \subset X$? Folgern Sie daraus, dass $\mathcal{N} = X$. (Hinweis: ZF7)

e) Sei $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finden Sie eine Vorgehensweise, um ein Element aus jedem Element von X auszuwählen.

f) Gleiche Aufgabe mit $X = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. (Hinweis: ZF10)

Anhang 2: Cantors Diagonalargumente

41 Abzählbar unendliche Mengen

Definition 41.1. Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Bemerkung 41.2.

• Im Fall $|X| < |Y|$ gibt es keine surjektive Abbildung $f : X \to Y$: Das Bild von f hat höchstens $|X|$ Elemente, und somit ist $\mathrm{Bild}(f) \neq Y$.
Insbesondere gibt es keine bijektive Abbildung $f : X \to Y$.

• Im Fall $|X| > |Y|$ gibt es keine injektive Abbildung $f : X \to Y$: Da $|Y| < |X|$ ist, müssen mindestens 2 Elemente von X auf dem selben Element von Y abgebildet werden.
Insbesondere gibt es keine bijektive Abbildung $f : X \to Y$.

Definition 41.3. Eine Mengen M heißt **abzählbar unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar unendlich ist, heißt **überabzählbar**.

42 Cantors erstes Diagonalargument

Satz 42.1. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.*

Beweis.
Wir konstruieren zuerst eine bijektive Abbildung

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}\,.$$

Alle positiven rationalen Zahlen lassen sich in die Form $\frac{a}{b}$ schreiben, mit a, b positive ganze Zahlen. Wir bilden dann die (seitliche) Tabelle dieser Brüchen $\frac{a}{b}$.

Wir zählen die Elemente dieser Tabelle (also von $\mathbb{Q}^+$) "diagonal" ab, wobei wir die nicht vollständig gekürzte Brüche (z.B. $\frac{4}{2}$) überspringen.
Alle positive rationale Zahlen sind dann in dieser Liste, und durch das Überspringen kürzbarer Brüche wird jede positive rationale Zahl nur ein mal abgezählt.

$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir die bijektive Abbildung $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}$$

Wir definieren dann die bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, indem wir hinter jeder Zahl deren Negatives einfügen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	3	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$

$\square$

43 Cantors zweites Diagonalargument

Satz 43.1. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to (0,1)$ gibt. Damit ist das Intervall $(0,1)$ überabzählbar, und somit ist $\mathbb{R}$ ebenfalls überabzählbar, da das betrachtete Intervall $(0,1)$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Widerspruchbeweis: Wir nehmen es an, dass $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ eine surjektive Abbildung ist, und wir möchten einen Widerspruch erhalten.

Diese Zahlen $f(n), n \in \mathbb{N}$ sehen in ihrer Dezimalbruch-Entwicklung [4] so aus:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0,\ \ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ a_{1,5}\dots \\ f(1) & = & 0,\ \ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ a_{2,5}\dots \\ f(2) & = & 0,\ \ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4}\ a_{3,5}\dots \\ f(3) & = & 0,\ \ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4}\ a_{4,5}\dots \\ f(4) & = & 0,\ \ a_{5,1}\ a_{5,2}\ a_{5,3}\ a_{5,4}\ a_{5,5}\dots \\ \vdots & & \end{array}$$

Hier sind die $a_{i,j} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ Dezimalstellen der zugehörigen reellen Zahl.

Die Elemente auf der Diagonale sind markiert, und aus diesen konstruieren wir auf folgende Weise eine neue Zahl $x = 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5 \dots \in (0,1)$.

Jede diagonale Zahl $a_{i,i}$ definiert die Dezimalstelle b_i von x:

$$b_i := \begin{cases} 4 & \text{falls } a_{i,i} = 5 \\ 5 & \text{falls } a_{i,i} \neq 5 \end{cases}$$

Damit ist $b_i \neq a_{i,i}$ und somit $f(n) \neq x \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Funktion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ nicht surjektiv. Widerspruch. $\square$

Bemerkung 43.2. Tatsächlich ist $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $(0,1)$, wie man anhand einer geeigneten Bijektion erkennt, z.B. $(0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$.

Satz 43.3 (Satz von Cantor)**.** *Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Menge der Teilmengen von X. Dann gilt $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

[4] Eigentlich gibt es Zahlen, die 2 Darstellungen haben, und zwar die Zahlen, die mit einer unendlichen Folge von 0 oder 9 enden: Z.B. $0,1999999999\ldots = 0,200000\ldots$. In diesem Fall betrachten wir nur die Darstellung, die am Ende unendliche viele 0 hat.

Beweis. Da $\alpha : X \to \mathcal{P}(X)\,, x \mapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung ist, muss es im Bild(α) mindestens $|X|$ Elemente geben, also gilt es $|X| \leq \ |\mathcal{P}(X)|$.

Behauptung: Es gibt keine surjektive Abbildung von X nach $\mathcal{P}(X)$.

Widerspruchbeweis: Wir gehen davon aus, dass eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ existiert, und wir werden einen Widerspruch erhalten. Sei

$$W := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset \mathcal{P}(X)\,.$$

Da f surjektiv ist, existiert ein $w \in X$ mit $f(w) = W$.
Es gilt dann $w \in W \Longleftrightarrow w \notin f(w) = W$. Widerspruch.

Damit ist die Behauptung bewiesen, und daraus folgt $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. $\square$