# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DIR 1.*

## 1 Konvergenz von Folgen und Funktionsfolgen

**Definition 1.** Die reelle Folge $(c_n)_n$ *kovergiert* gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N_\epsilon$ so gibt, dass $|c_n - c| < \varepsilon$, falls $n \geq N_\epsilon$.

**Definition 2.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : I \to \mathbb{R}$.
Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |g_n(x) - g(x)| = 0\,.$$

**Satz 3.** *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann ist die Grenzfunktion $f$ ebenfalls stetig.*

**Satz 4.** *Sei $I$ ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_n \left( \int_I f_n(x)dx \right) = \int_I f(x)dx\,.$$

**Satz 5** (Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** *Sei $I$ ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und konvergiere die Folge $(f_n)_n$ punktweise gegen $f : I \to \mathbb{R}$. Existiere $g : I \to \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ und $\int_I g(x)dx < \infty$, dann gilt*

$$\lim_n \left( \int_I f_n(x)dx \right) = \int_I f(x)dx\,.$$

## 2 Konvergenz von Reihen und Funktionenreihen

**Definition 6.** Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent* gegen $c \in \mathbb{R}$, falls die Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_N$ ihrer Partialsummen gegen $c$ konvergiert. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

**Satz 7.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen Summanden $a_n$.*

*a) Bildet die Folge $(a_n)_n$ keine Nullfolge, dann konvergiert die Reihe nicht.*

*b) Leibniz-Kriterium. Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, mit $a_n > 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.*

*c) Majorantekriterium. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente reelle Reihe mit $b_n \geq 0$ und gelte für fast alle $n$: $|a_n| \leq b_n$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

*d) Wurzel- und Quotientkriterium. Existiere* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L \in \mathbb{R}$, *oder existiere* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: L \in \mathbb{R}$, *falls* $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.
*Dann: 1) Falls* $L < 1$, *konvergiert die Reihe absolut; 2) Falls* $L > 1$, *divergiert sie.*

*e) Falls die Reihe absolut konvergent ist, konvergiert sie.*

**Wichtige Beispiele**. i) *Die geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ $(q \in \mathbb{C})$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall konvergiert die geometrische Reihe gegen $\frac{1}{1-q}$.

ii) *Die allgemeine harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$.

**Definition 8.** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Funktionenereihe, mit den Reihengliedern $f_n : I \to \mathbb{R}$.
Sie heißt *punktweise konvergent* (bzw. *gleichmäßig konvergent*) auf $I$ gegen die Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls die Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)_N$ ihrer Partialsummen punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $f$ konvergiert.

**Satz 9** (Majorantenkriterium von Weierstraß). *Sei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen und es gelte für alle Funktionen* $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_{>0})$ *die Ungleichung* $|f_n(x)| \leq a_n$ *für alle* $x \in I$, *so ist die Funktionenreihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmäßig auf* $I$ *konvergent.*

## 3 Differentiation von Integralfunktionen

**Satz 10** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion.*
*i) Für alle* $x_0 \in [a,b]$ *ist die Funktion* $F : [a,b] \to \mathbb{R}\,, F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ *differenzierbar und eine Stammfunktion von* $f$, *d.h.* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$.
*ii) Sei* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* $f$, *dann gilt* $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

**Satz 11** (Differentierbarkeit von Parameter-Integralen). *Sei* $B \subseteq \mathbb{R}$ *offen,* $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein abgeschlossenes Intervall und* $f : B \times I \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto f(x,t)$ *stetig, und stetig partiell differenzierabar nach* $x$, *so ist auch* $F : B \to \mathbb{R}\,, F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$ *stetig differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt\,.$$

**Satz 12** (Leibnizsche Formel). *Sei* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto f(x,t)$ *stetig und nach* $x$ *stetig differenzierbar. Die Funktionen* $\psi, \phi : [a,b] \to [c,d]$ *seien differenzierbar.*
*Dann ist* $h(x) := \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt$ *auf* $[a,b]$ *differenzierbar mit*

$$h'(x) = f\left(x, \psi(x)\right) \cdot \frac{d}{dx}\psi(x) - f\left(x, \phi(x)\right) \cdot \frac{d}{dx}\phi(x) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt\,.$$

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DIR 2.*

## 1 Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen

**Definition 1.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $a \in U$ *(total) differenzierbar*, falls es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x) - f(a) - L(x-a)||}{||x-a||} = 0\,.$$

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $u \in U$ *partiell differenzierbar* in der $k$-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(u) := \lim_{h \to 0} \frac{f(u + he_i) - f(u)}{h}$$

existiert. Dabei ist $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^n$.

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)$ fur alle $u \in U$ und alle $k = 1, \dots, n$ existiert; und $f$ heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R}$ stetig sind.

**Satz 2.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $a \in U$ total differenzierbar, dann ist $f$ in $a$ stetig und partiell differenzierbar.*

**Satz 3.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine in $U$ partiell differenzierbare Funktion. Seien alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ im Punkt $x \in U$ stetig, dann ist $f$ in $x$ total differenzierbar.*

## 2 Extremalstellen

**Satz 4** (Satz von Weierstraß)**.** *Sei $K$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder von $\mathbb{C}$), und sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt $f$ Maximum und Minimum auf $K$ an.*

**Satz 5** (notwendige Bedingung für lokales Extermum)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Besitzt $f$ in $u \in U$ ein lokales Extremum, so ist $u$ eine kritische Stelle von $f$, also gilt $\nabla f(u) = 0$.*

**Satz 6** (hinreichende Bedingung für lokales Extermum)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $u \in U$ eine kritische Stelle von $f$.*

*a) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von $f$ in $u$ positiv definit, so besitzt $f$ in $u$ ein isoliertes lokales Minimum.*

*b) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von $f$ in $u$ negativ definit, so besitzt $f$ in $u$ ein isoliertes lokales Maximum.*

*c) Ist die Hesse-matrix $Hf(u)$ von $f$ in $u$ indefinit, so besitzt $f$ in $u$ kein lokales Extremum.*

### Extrema mit Nebenbedingung

**Satz 7** (Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $M \subseteq U$ die Untermannigfaltigkeit $M := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$, wobei $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, mit $\nabla g \neq 0$ für alle $x \in M$.*

*Weiter sei $F : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $F_{|M}$ in einem Punkt $a \in M$ ein lokales Extremum besitzt.*

*Dann existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\nabla F(a) + \lambda \nabla g(a) = 0$.*

# 3 Fixpunktsatz von Banach

**Definition 8.** Ein metrischer Raum ist ein *vollständiger Raum*, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen des Raums konvergiert.

**Definition 9.** Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine relle Zahl $L \in [0, 1)$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L \cdot d(x, y) .$$

**Satz 10** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $(M, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, und sei $\Phi : M \to M$ eine Kontraktion.*

*Dann besitzt $\Phi$ genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes $m_* \in M$ mit $\Phi(m_*) = m_*$.*

*Für einen beliebigen Anfangswert $m_0 \in M$ konvergiert die durch $m_k := \Phi(m_{k-1})$ rekursiv definierte Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt $m_*$.*

# 4 Satz von Fubini und der Transformationssatz

**Satz 11** (Satz von Fubini). *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Elementarenbereich*

$$V := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \ldots, x_{j-1})\} ,$$

*und sei $f : V \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, dann*

$$\int_V f \; dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1,\ldots x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) \; dx_n \cdots dx_2 dx_1 .$$

*Bemerkung* 12. Dabei spielt die Reihenfolge der Variablen bei der Beschreibung des Elementarbereichs keine Rolle. Insbesondere gilt für Doppelintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

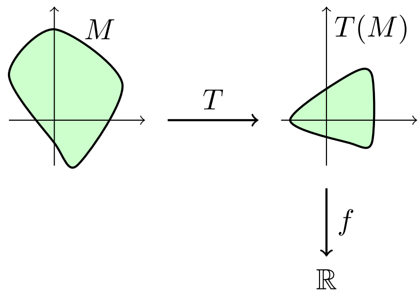
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \; dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \; dydx .$$

**Definition 13.** Seien $M$ und $N$ offene Teilemenge von $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive Abbildung $F : M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, falls $f$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}$ stetig differenzierbar sind.

**Satz 14.** *Sei $F : D \to F(D)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wenn $F$ bijektiv mit $\det JF(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ ist, dann ist $F$ eine Diffeomorphismus.*

**Satz 15** (Transformationssatz). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und sei $T : M \to T(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Diffeomorphismus.*
*Dann ist die Funktion $f(v)$ auf $T(M)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $f(T(z))|\det JT(z)|$ auf $M$ integrierbar ist.*
*In diesem Fall gilt:*

$$\int_{T(M)} f(v) \, \mathrm{d}v = \int_M f(T(z))|\det JT(z)| \, \mathrm{d}z .$$



# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DGL 1.*

## 1 Existenz-und Eindeutigkeitssätze

Sei $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $F : B \to \mathbb{R}^n\,, (t, \mathbf{x}) \mapsto F(t, \mathbf{x})$ eine stetige Funktion.

**Definition 1.** Sei $U$ eine offene Teilmenge von $B$. Wenn eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so dass

$$||F(t, \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{u})|| \leq L \cdot ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| \qquad \forall (t, \mathbf{v}), (t, \mathbf{u}) \in U$$

gilt, sagt man dass die Funktion $F$ auf $U$ *Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$ ist.
Wenn es um jeden Punkt $(t, \mathbf{x}) \in B$ eine Umgebung $U \subseteq B$, auf der $F$ Lipschitz-stetig bzgl. $\mathbf{x}$ ist, heißt $F$ *lokal Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$.

**Satz 2.** *Wenn die Funktion $F : B \to \mathbb{R}^n$ nach der Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ stetig partiell differenzierbar ist, ist Fauf $B$ lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.

**Satz 3** (Picard-Lindelöf). *Sei $F : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.* $\mathbf{x}$.
*Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in B$ genau eine maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ($I$ offen, $t_0 \in I$) des AWP*

$$\mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \tag{1}$$

*Bemerkung* 4. a) Eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP heißt *maximal*, wenn es keine Lösung $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des AWP (1) gibt, mit $I \subset \tilde{I}$.

b) Wenn $F : B \to \mathbb{R}^n$ nur stetig ist, besitzt das AWP eine Lösung (Satz von Peano), aber diese ist nicht unbedingt eindeutig; z.B. $y' = \sqrt[3]{y^2}\,, y(0) = 0$ hat unendliche viele Lösungen.

**Satz 5** (Linear beschränkte rechte Seite). *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $t_0 \in J$.*
*Die Abbildung $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich* $\mathbf{x}$.
*Wenn es stetige Funktionen $\alpha, \beta : J \to [0, +\infty)$ gibt, so dass*

$$||F(t, \mathbf{x})|| \leq \alpha(t) \cdot ||\mathbf{x}|| + \beta(t) \qquad \forall t \in J, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

*gilt, dann existiert eine eindeutige Lösung von dem AWP (1) auf ganz $J$.*

*Bemerkung* 6. Falls $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich $\mathbf{x}$ auf $J \times \mathbb{R}^n$ ist, existiert eine eindeutige Lösung des AWP (1) auf $J$.

**Satz 7** (Randverhalten maximaler Lösungen). *Sei $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des AWP (1). Falls $b < \infty$ ist, gibt es genau zwei Möglichkeiten:*

- *entweder ist $\varphi(t)$ auf dem Intervall $[t_0, b)$ unbeschränkt:* $\lim_{t \to b^-} |\varphi(t)| = \infty$;
- *oder der Rand $\partial B$ von $B$ ist nichtleer und es gilt* $\lim_{t \to b^-} \text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial B) = 0$.

*Eine änliche Aussage gilt falls $a > -\infty$.*

*Bemerkung* 8. Sei $F\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und Lipschitz-stetige Funktion, und sei $\varphi\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der *autonomen* DGL $\mathbf{x}(t)' = F(\mathbf{x}(t))$. Falls der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) =: \gamma \in \mathbb{R}^n$ existiert, ist $\gamma$ eine konstante Lösung der DGL, d.h.$F(\gamma) = 0$.

## 2 Eindimensionale Lösungsverfahren

Sei $F : G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige und lokal Lipschitz-stetige bzgl. $x$ Abbildung und betrachte das Anfangswertproblem

$$x' = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \,. \tag{2}$$

**Trennung der Variablen.**

Wenn man $F$ als Produkt $F(t,x) = g(t) \cdot h(x)$ mit stetigen Funktionen $g, h$ darstellen kann, bekommt man die Differentialgleichung

$$x'(t) = g(t) \cdot h(x(t)) \,.$$

Falls $h(x_0) = 0$ hat das AWP die konstante Lösungen: $x(t) \equiv x_0$.
Falls $h(x_0) \neq 0$ ergibt sich durch "Bruchrechnung" eine Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{h(x(t))} \cdot x'(t) = g(t) \,.$$

Sei $H$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und $G$ eine von $g$, so ist

$$H(x(t)) = G(t) + c \,, \qquad \text{wobei } c := H(x_0) - G(t_0) \,.$$

Wegen $H'(x(t)) = \dfrac{1}{h(x(t))} \neq 0$ kann man diese Gleichung lokal nach $x$ auflösen und erhält die Lösung

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + H(x_0) - G(t_0)) \,.$$

**Variation der Konstanten.**

Wenn man $F$ als $F(t,x) = g(t) \cdot x + h(t)$ mit stetigen Funktionen $g, h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ darstellen kann, bekommt man die inhomogene lineare Differentialgleichung $x' = g(t) \cdot x + h(t)$.
Man löst man erst mit Trennung der Variablen die zugehörige homogene DGL $x' = g(t) \cdot x$:

$$x(t) = C \cdot e^{G(t)} \,, \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \,,$$

wobei $G$ eine Stammfunktion zu $g$ ist.
Um eine Lösungen der inhomogene Gleichung $y' = g \cdot y + h$ zu finden, macht man den Ansatz

$$x = C(t) \cdot e^{G(t)} \,,$$

den man als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Es ist

$$x' = C'e^G + Cge^G = gx + C'e^G \qquad \Longrightarrow \qquad C' = he^{-G}$$

Man bestimmt die gesucht Funktion $C : I \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion von $he^{-G}$.
Die maximale Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ des AWP (2) ist dann durch die Formel

$$\phi(t) = e^{G(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) e^{-G(s)} ds \right)$$

gegeben.

**Picard-Lindelöf Iterationsverfahren**

Sei $\varphi_0$ die konstante Funktion $\varphi_0(t) = x_0$ und

$$\varphi_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \,.$$

Dann konvergiert die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf einer Umgebung von $t_0$ gleichmäßig gegen die Lösung des AWP (2).

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DGL 2.*

## 1 Lineare Differentialgleichungssysteme

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $A\colon I \to Mat(n \times n, \mathbb{R})$, und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \tag{1}$$

eine *lineares Differentialgleichungssystem.* Das System $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ nennt man das zugehörige *homogene Differentialgleichungssystem.*

*Bemerkung* 1. Das AWP $x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t)$ $x(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n)$ besitzt stets eine eindeutige Lösung.

**Satz 2** (Superpositionsprinzip)**.** *Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen der DGL* (1) *und sei $\mathcal{L}_0$ die Menge aller Lösungen der homogen DGL $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$. Dann gilt:*

*a) $\mathcal{L}_0$ ist ein $n$-dimensionaler Vektorraum.*

*b) $\mathcal{L}$ ist ein affiner Raum: es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + x_p$, wobei $x_p$ eine spezielle Lösung der inhomogene DGL ist.*

Ein *Fundamentalsystem* des Systems $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ ist eine Basis $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ des Lösungsraums $\mathcal{L}_0$, die Matrix $X(t) := (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ wird dann *Fundamentalmatrix* genannt.

**Satz 3.** *Sei $B(t)$ eine Stammfunktion von $A(t)$. Wenn $A(t) \cdot B(t) = B(t) \cdot A(t)$ für $t \in I$ gilt, dann ist die Matrix*

$$X(t) = \exp\left(B(t)\right)$$

*eine Fundamentalmatrix von $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.*
*Insbesondere falls $A(t) := A$ eine konstante Matrix ist, ist $X(t) = e^{tA}$.*

**Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten: $A(t) = A$.**

Wenn das System konstanten Koeffizienten hat, kann man ein Fundamentalsystem von $x'(t) = A \cdot x(t)$ mit dem folgenden Ansatz finden.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix $A$, und bezeichne $k$ seine algebraische Vielfachheit. Der liefert dann $k$ linear unabhängige Lösungen des System.

• Falls die geometrische Vielfachheit von $\lambda$ gleich $k$ ist, besitzt das System die Lösungen

$$v_1 e^{\lambda t}, \ldots, v_k e^{\lambda t},$$

wobei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis des Eigenraums $V_\lambda$ sind.

• Falls die geometrische Vielfachheit von $\lambda$ kleiner als $k$ ist, besitzt das System die Lösungen

$$(v_j + (A - \lambda I)v_j t + \cdots + (A - \lambda I)^{k-1} v_j t^{n-1}) e^{\lambda t}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

wobei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis des Hauptraum $\tilde{V}_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^k v = 0\}$ sind.

*Bemerkung* 4. i) Eulersche Formel: $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta)$, für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Sei $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ ein nicht-reeller Eigenwert von $A$ mit Eigenvektor $v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $A$ zum Eigenvektor $\overline{v}$. Wir erhalten dann die beiden komplexen Lösungen $x_1(t) = ve^{(a+ib)t}$ und $x_2(t) = \overline{v}e^{(a-ib)t}$. Durch die Setzungen

$$y_1(t) := \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{at}(u\cos(bt) - w\sin(bt)), \quad y_2(t) := \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = e^{at}(w\cos(bt) + u\sin(bt))$$

finden wir zwei reelle Lösungen.

## 2 Lineare Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n-1$, und $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \tag{2}$$

eine inhomogene *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.*
Die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ nennt man die zugehörige *homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung.*

*Bemerkung* 5. Man kann eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung in ein lineares Differentialgleichungssystem umwandeln: Setzen wir $y_j(t) = y^{(j-1)}(t)$, so erhalten wir das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

**Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.**

Für $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung (2)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)\,. \tag{4}$$

Das *charakteristische Polynom* dieser DGL ist das Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, das das charakteristische Polynom der obigen Matrix ist.

**Satz 6.** *Es gilt $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda-\lambda_r)^{k_r}$ mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so bilden die Funktionen*

$$e^{\lambda_i t},\ t \cdot e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ t^{k_i - 1} \cdot e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, r$$

*eine Basis des Lösungraum $\mathcal{L}_0$ der homogene DGL $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$.*

*Bemerkung* 7. Sei $\lambda_0 = a + ib$ eine nicht-reelle Nullstelle von $P(\lambda)$, dann ist auch $\overline{\lambda}_0$ eine Nullstelle. Die beiden komplexen Lösungen $x_1(t) = t^l \cdot e^{(a+ib)t}$ und $x_2(t) = t^l \cdot e^{(a-ib)t}$ ergeben dann die reellen Lösugnen

$$y_1(t) := \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = t^l \cdot e^{at}\cos(bt) \quad y_2(t) := \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = t^l \cdot e^{at}\sin(bt)\,.$$

**Satz 8.** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $m_\alpha$ die Vielfachheit von $\alpha$ bzgl. des Polynoms $P(\lambda)$, d.h. $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_\alpha} \cdot \tilde{P}(\lambda)$, mit $\tilde{P} \in \mathbb{R}[\lambda]$ und $\tilde{P}(\alpha) \neq 0$.*

$*$ *Falls $b(t) = f(t)e^{\alpha t}$ ist, mit $f \in \mathbb{R}[t]$ Polynom von Grad $d$, dann besitzt die DGL* (4) *eine spezielle Lösung der Form*

$$x_p(t) = t^{m_\alpha} \cdot g(t)e^{\alpha x}$$

*wobei $g \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom von Grad $d$ ist.*

$*$ *Falls $b(t) = c_1\sin(\alpha t) + c_2\cos(\alpha t)$ ist, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann besitzt die DGL* (4) *eine spezielle Lösung der Form*

$$x_p(t) = t^{m_\alpha} \cdot (d_1\sin(\alpha t) + d_2\cos(\alpha t))$$

*wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.*

Im Fall $P(\alpha) = 0$, d.h. $m_\alpha \geq 1$ sprich man auch vom *Resonanzfall.*

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DGL 3.*

## 1 Erhaltungsgröße

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ betrachte man das autonome System

$$y' = F(y)\,. \tag{1}$$

**Definition 1.** Eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* oder *Erhaltungsgröße* des Systems (1), falls $H$ längs jeder Lösung $\varphi\colon I \to D$ von (1) konstant ist, d.h. falls

$$0 = \frac{d}{dt}H(\varphi(t)) = \langle \nabla H(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = \langle \nabla H(\varphi(t)), F(\varphi(t))\rangle$$

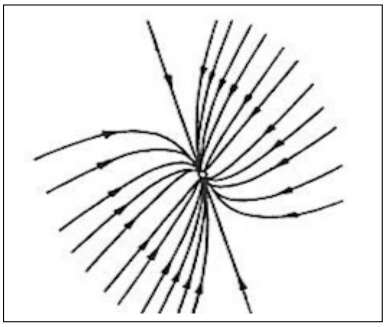
*Bemerkung* 2. Seien $H\colon D \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral und $\varphi\colon I \to D$ eine Lösung des Systems $y' = F(y)$. Die Trajektorie $\varphi(I)$ verläuft stets innerhalb einer Niveaumenge $H^{-1}(a),\ a \in \mathbb{R}$.

**Satz 3.** *Sei $\Gamma \in D$ eine glatte geschlossene Kurve mit $F(x) \neq 0$ auf $\Gamma$. Für eine Lösung $\varphi\colon I \to D$ von (1) mit $\varphi(I) \subseteq \Gamma$ gilt dann $I = \mathbb{R}$, $\varphi(I) = \Gamma$, und $\varphi$ ist periodisch.*

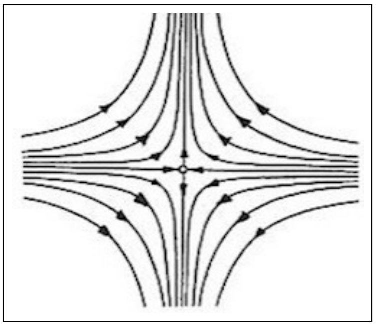
## 2 Phasenportraits zweidimensionaler linearer Gleichungen

Sei $A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$. Um das gesamte Lösungsverhalten des System $x' = A \cdot x$ anschaulich vor uns zu haben, brauchen wir das Phasenportrait. Dafür seien $\lambda_1, \lambda_2$ die Eigenwerte der Matrix $A$.

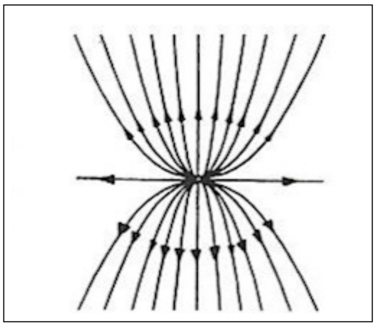
### 2.1 Reelle Eigenwerte



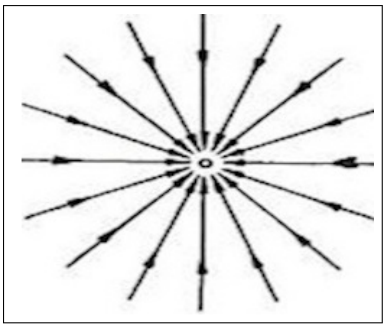
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$:
**asymptotisch stabiler** 2-tangentialer Knoten



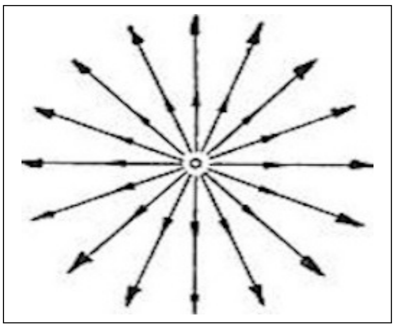
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$:
**instabil**; Sattelpunkt



$0 < \lambda_2 < \lambda_1$:
**instabiler** 2-tangentialer Knoten

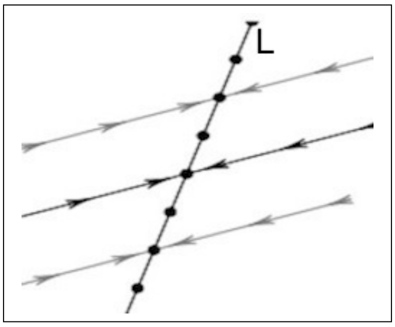


$\lambda < 0$ dopp. EW, $A = \lambda E$:
**asymptotisch stabiler** Sternpunkt

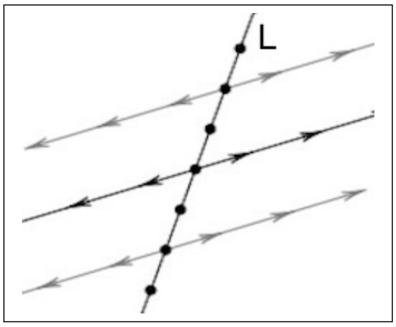


$\lambda > 0$ dopp. EW, $A = \lambda E$:
**instabiler** Sternpunkt

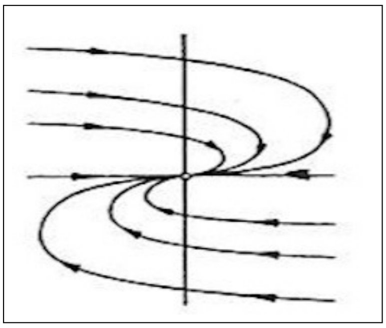
$\lambda = 0$ dopp. EW, $A = 0$:
jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist **stabil**



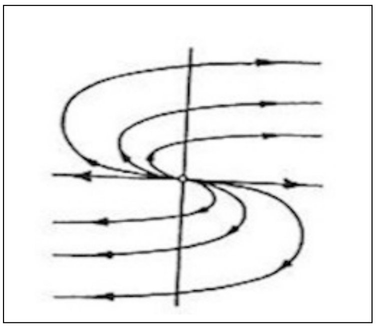

$\lambda_2 < \lambda_1 = 0$:
jeder Punkt auf der Gerade
$L$ ist **stabil**



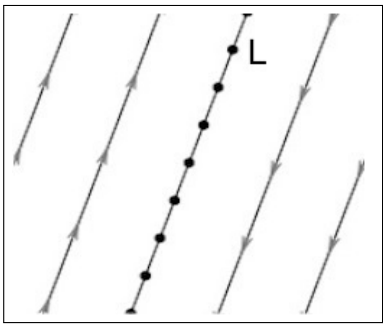

$0 = \lambda_2 < \lambda_1$:
jeder Punkt auf der Gerade
$L$ ist **instabil**



$\lambda < 0$ dopp. EW, $A \neq \lambda E$:
**asymptotisch stabiler**
1-tangentialer Knoten

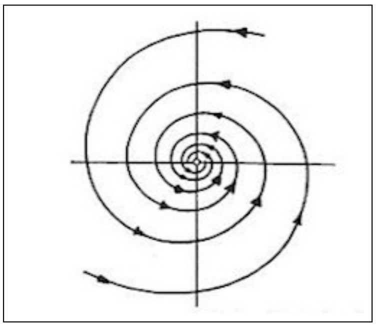


$\lambda > 0$ dopp. EW, $A \neq \lambda E$:
**instabiler** 1-tangentialer
Knoten

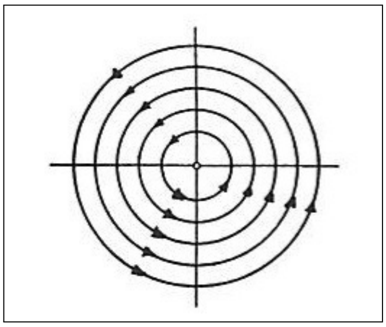



$\lambda = 0$ dopp. EW, $A \neq 0$:
jeder Punkt auf der Gerade
$L$ ist **instabil**

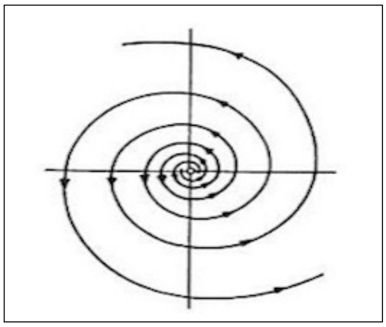
### Komplex konjugierte Eigenwerte



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$
**asymptotisch stabiler**
Strudel



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = 0$
**stabiler** Strudel / Wirbel
oder Zentrum



$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$
**instabiler** Strudel

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript DGL 4.*

## 1 Gleichgewichtspunkte und Stabilität

Betrachte man das autonome System

$$y' = F(y) \tag{1}$$

mit einer stetigen und Lipschitz-stetigen Abbildung $F : D \to \mathbb{R}^n$, die auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist.

**Definition 1.** i) Die maximale Lösung $\phi_q(t)\colon I_{max} \to \mathbb{R}^n$ des AWP $y' = F(y)$, $y(0) = q$ heißt *Flusslinie* durch $q \in D$. Das Bild einer Flusslinie nennt man *Trajektorie*: $\{\phi_q(t) : t \in I_{max}\}$.
ii) Ein Punkt $p \in D$ mit $F(p) = 0$ heißt *Gleichgewichtspunkt*, oder *Ruhepunkt* oder *stationärer Punkt* der DGL (1). Jeder Ruhepunkt $p$ liefert mittels der Setzung $\phi_p(t) \equiv p$ offenbar eine Lösung der DGL (1).

**Lemma 2.** *Zwei Trajektorien von* (1) *sind entweder gleich oder disjunkt, d.h. sie schneiden sich nicht.*

**Definition 3.** Sei $y$ eine auf $[0, +\infty)$ definierte Lösung von (1).

a) Die Lösung $y$ heißt *stabil*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen $z$ von (1) mit $||y(0) - z(0)|| < \delta$ für alle $t \geq 0$ existieren und der Ungleichung

$$||y(t) - z(t)|| < \epsilon$$

für alle $t \in [0, \infty)$ genügen.

b) Die Lösung $y$ heißt *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

c) Die Lösung $y$ heißt *attraktiv*, wenn ein $\gamma > 0$ existiert, so dass alle Lösungen $z$ von (1) mit $||y(0) - z(0)|| < \gamma$ für alle $t \geq 0$ existieren und der Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} ||y(t) - z(t)|| = 0$$

genügen.

d) Die Lösung $y$ heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist.

*Bemerkung* 4. Die Begriffe "stabil" und "attraktiv" sind unabhängig voneinander.

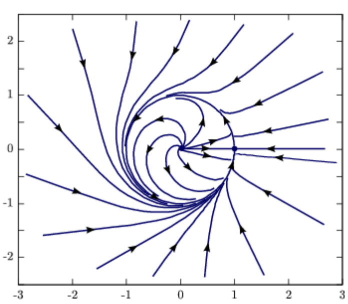
• Die autonome Differentialgleichung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$ besitzt die allgemeine Lsüng $y(t) = (a, b \cdot e^{-t})$. Der kritische Punkt $p := (0, 0)$ ist stabil, denn $|y(t)| = |(a, b)| < \delta := \epsilon$ ist, so gilt $|y(t)| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$; aber nicht attraktiv, denn $\lim_{t\to\infty} y(t) = (a, 0) \neq (0, 0)$ für $a \neq 0$.

• Die in Polarkoordinatendarstellung gegebene Differentialgleichung

$$r' = r(1 - r)\,, \qquad \theta' = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

lässt sich explizit lösen: Seien $r_0 := r(t_0)$ und $\theta_0 := \theta(t_0)$, es gilt

$$r(t) = \frac{r_0}{r_0 - (1 - r_0)e^{-t}}\,, \qquad \theta(t) = 2\arctan\left(\frac{2\sin(\theta_0)}{2\cos(\theta_0) - t\sin(\theta_0) + 2}\right)$$




Das Phasenportrait zeigt folgendes Bild: Der Einheitskreis besteht aus der Ruhelage $(1,0)$ und einer Trajektorie, die in beiden Zeitrichtungen gegen diesen Punkt strebt (auf Einheitskreis ist $r(t) \equiv 1$). Damit ist $p := (1,0)$ bereits instabil, denn in der Nähe von $p$ "starten" auf dem Einheitskreis Lösungen, die eine $\epsilon$-Umgebung von $p$ verlassen (denn die Lösungen durchlaufen den Einheitskreis). Andererseits gilt $(r(t), \theta(t)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} (1,0)$ für alle Lösungen, und daher ist $p$ eine attraktive Ruhelage.

### Stabilität bei linearen DGL

**Satz 5.** *Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von $A$, die hier so angeordnet seien, dass jedem Eigenwert $\lambda_k$ ein Jordan-Block $J_k$ in der Jordanschen Normalform entspricht. Dann gelten:*

*a) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann stabil, wenn $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, r$ gilt und der Jordan-Block $J_k$ für die Eigenwerte mit $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) = 0$ eindimensional ist.*

*b) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \ldots, r$ gilt.*

*c) Das Gleichgewichts $\phi \equiv 0$ von $y' = A \cdot y$ ist genau dann instabil, wenn es einen Eigenwert $\lambda_k$ gibt, so dass entweder $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) > 0$ gilt oder $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) = 0$ ist und der zugehörige Jordan-Block $J_k$ jedoch mindestens die Dimension $2 \times 2$ hat.*

### Linearisierte Stabilität bei nichtlinearen DGL

**Satz 6.** *Sei $F \colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $F(p) = 0$, wobei $D$ eine offene Menge ist.*

*a) Der Ruhepunkt $\phi_p \equiv p$ von $y' = F(y)$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $DF(p)$ negativen Realteil haben.*

*b) Der Ruhepunkt $\phi_p \equiv p$ von $y' = F(y)$ ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert der Jacobi-Matrix $DF(p)$ positiven Realteil hat.*

### Die Methode von Lyapunov

Betrachte das autonome System (1), und sei $\phi_p \equiv p$ ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

**Definition 7.** Eine stetig differenzierbare Funktion $V \colon D \to \mathbb{R}$ heißt *Lyapunov-Funktion* des Systems (auf $D$), falls gilt:

$$\begin{aligned} V(p) = 0\,, V(y) > 0 \qquad & \text{für alle } y \in D \setminus \{p\}, \\ \dot{V}(y) := \langle \nabla V(y), F(y) \rangle \leq 0 \qquad & \text{für alle } y \in D. \end{aligned} \tag{2}$$

Falls sogar $\dot{V}(y) < 0$ für alle $y \in D \setminus \{p\}$ gilt, heißt $V$ *strenge Lyapunov-Funktion.*

**Satz 8** (Stabilität nach Lyapunov)**.**

*a) Sei $V \colon D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion des Systems. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $\phi_p \equiv p$ stabil.*

*b) Sei $V \colon D \to \mathbb{R}$ eine strenge Lyapunov-Funktion des Systems. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $\phi_p \equiv p$ asymptotisch stabil.*

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript FT 1.*

## 1 Holomorphe Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $c \in U$.

**Definition 1.** Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar im Punkt im Punkt $c$*, falls der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existiert.

**Satz 2.** *Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- *$f$ ist in $c$ komplex differenzierbar;*
- *$f$ erfüllt in $c$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$
- *Im Punkt $c$ verschwindet die Wirtinger Ableitung nach $\bar{z}$: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c) = 0$.*

**Definition 3.** Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $f$ in $U$ komplex differenzierbar ist, d.h. falls $f$ in jedem Punkt von $U$ komplex differenzierbar ist. Man schreibt $f \in \mathcal{O}(U)$.
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph im Punkt $c$*, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von $c$ existiert, so dass $f_{|V} : V \to \mathbb{C}$ holomorph ist.
Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganz.*

*Bemerkung* 4. Die Summe, das Produkt und die Komposition holomorpher Funktionen sind selbst holomorph. Auch der Quotient zweier holomorpher Funktionen, dessen Nenner nullstellenfrei ist, stellt wieder eine holomorphe Funktion dar.

## 2 Fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen

**Satz 5.** *Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar.*

**Satz 6** (Maximum- und Minimumprinzip für beliebige Gebiete)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.*
○ *Nimmt der Absolutbetrag der holomorphen Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ ein lokales Maximum an, so ist $f$ konstant.*
○ *Nimmt der Absolutbetrag der holomorphen Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ im Punkt $c \in G$ ein lokales Minimum an, so ist $f(c) = 0$ oder $f$ konstant.*

**Satz 7** (Maximum- und Minimumprinzip für beschränkte Gebiete)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $g : \bar{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.*

- *Ist $g$ auf $G$ holomorph, so gilt für alle $p \in \bar{G}$: $|g(p)| \le \max\limits_{z\in\partial G} |g(z)|$.*
- *Ist $g$ auf $G$ holomorph und nullstellenfrei, so gilt für alle $p \in \bar{G}$: $|g(p)| \ge \min\limits_{z\in\partial G} |g(z)|$.*

**Satz 8** (Offenheitssatz und Satz der Gebietstreue)**.**
⋄ *Jede nirgends lokal konstante holomorphe Funktion ist offen.*
⋄ *Jede nirgends lokal konstante holomorphe Funktion ist gebietstreue.*

**Satz 9** (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

**Satz 10** (Identitätssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*a)* $f = g$.

*b) Die Menge $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in $G$.*

*c) Es gibt einen Punkt $c \in G$ mit $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

# 3 Potenzreihen

Sei $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe ($a_n \in \mathbb{C}$) mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

**Definition 11.** Die reelle Zahl $r \in [0, \infty)$ heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P(z)$, falls $B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$ die größte offene Kreisscheibe ist, auf der $P(z)$ konvergiert.

**Satz 12** (Formel von Cauchy-Hadamard). *Die Potenzreihe $P(z)$ besitzt den Konvergenzradius* $r = \left( \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$.

**Satz 13** (Quotientformel). *Die Potenzreihe $P(z)$ besitze nur endlich viele verschwindende Koeffizienten und die Punktfolge $\left( \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right)_n$ konvergiere gegen einen reellen Wert oder $\infty$. Dann ist dieser Limes der Konvergenzradius vom $P(z)$.*

**Satz 14.** *Die Potenzreihe $P(z)$ besitze den Konvergenzradius $r > 0$. Dann:*

*a) Die Potenzreihe stellt auf $B := B_r(c)$ eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(B)$ dar.*

*b) Für die Koeffizienten $a_n$ gilt $a_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (Taylor Formel).*

*c) Die formal gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$ besitzt der Konvergenzradius $r$ und stellt die Ableitungsfunktion $f' \in \mathcal{O}(B)$ dar.*

*d) Die formal gliedweise integrierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n+1}$ besitzt der Konvergenzradius $r$ und stellt eine holomorphe Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(B)$ von $f$ dar.*

# 4 Harmonische Funktionen

**Definition 15.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ (als Funktionen zweier reeller Variablen) zweimal reell differenzierbar. Die Funktion $u$ heißt *harmonische Funktion*, falls

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{auf } U \text{ gilt.}$$

Die Funktionen $u$ und $v$ heißen *harmonisch konjugiert* zueinander, falls $u$ und $v$ harmonisch sind und $f := u + i \cdot v$ holomorph auf $U$ ist.

*Bemerkung* 16. Real- und Imaginärteil einer holomorphe Funktion sind harmonisch.

**Satz 17.** *Sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch, so existiert eine zu $u$ harmonisch konjugierte Funktion. Diese ist bis auf eine reelle additive Konstante eindeutig bestimmt.*

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript FT 2.*

## 1 Nullstellen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f(z_0) = 0$ und $f$ verschwinde nicht lokal um $z_0$. Sei $P(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Taylorreihe von $f$ um $c$ mit $a_k \neq 0$. Die natürliche Zahl $k$ heißt *Nullstellordnung* (= *Vielfachheit* der Nullstelle) der Funktion $f$ im Punkt $z_0$

**Satz 1** (Satz von Rouché)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma$ ein einfach geschlossener, nullhomologer Weg in $U$. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit*

$$|g(z)| < |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in |\gamma| .$$

*Dann haben die Funktionen $f$ und $f + g$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) im Innern von $\gamma$.*

## 2 Singularitäten

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $D$ eine diskrete Teilmenge von $U$ und sei $f : U \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph.

**Definition 2.** Jeder Punkt von $D$ heißt eine *isolierte Singularität* von $f$.

**Definition 3.** Eine isolierte Singularität $c \in D$ von $f$ lässt sich in drei Klassen einteilen:

i) $c$ heißt *hebbare Singularität*, falls $f$ holomorph nach $c$ fortsetzbar ist: $\exists \lim_{z\to c} f(z) \in \mathbb{C}$.

ii) $c$ heißt *Polstelle*, falls gilt $\lim_{z\to c} |f(z)| = \infty$.
In diesem Fall existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\lim\limits_{z\to c}(z - c)^k \cdot f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und $k$ heißt die *Polstellenordnung* von $f$ in $c$.

iii) $c$ heißt *wesentliche Singularität*, falls $c$ weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle von $f$ ist: $\nexists \lim_{z\to c} f(z)$.

**Definition 4.** Falls $f$ keine wesentliche Singularitäten hat, heißt $f$ *meromorph*, und man schreibt $f \in \mathcal{M}(U)$.

Sei $c \in D$, so lässt sich $f$ um $c$ eindeutig in eine *Laurentreihe* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - c)^n$ entwickeln, die in einem Kreisring der Form $R_{0,s} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-c| < s\}$ kompakt gegen $f$ konvergiert.

Sei $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - c)^n$ die Laurentreihe von $f$ um $c$:

**Satz 5** (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Folgende Aussage sind äquivalent:*
*i) Der Punkt $c$ ist eine hebbare Singularität von $f$;*
*ii) Es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von $c$, so dass $f$ auf $V \setminus \{c\}$ beschränkt ist;*
*iii) Es ist $a_n = 0$ für alle $n < 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ verschwindet.*

**Satz 6.** *Folgende Aussage sind äquivalent:*
*i) Der Punkt $c$ ist eine Polstelle der Ordnung $k$ von $f$.*
*ii) Es gibt $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(c) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ für $z \in U \setminus \{c\}$.*
*iii) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von $c$, so dass $\lim_{z\to c} |f(z) \cdot (z - c)^j| = \infty$ für $j \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$ und $f(z) \cdot (z - c)^k$ auf $V \setminus \{c\}$ beschränkt ist.*
*iii) Es ist $a_n \neq 0$ für $n < -k$ und $a_{-k} \neq 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ ist endlich.*

**Satz 7** (Casorati-Weierstraß). *Folgende Aussage sind äquivalent:*
*i) Der Punkt $c$ ist eine wesentliche Singularität von $f$;*
*ii) Zu jedem $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert eine Folge $(z_n)_n \subset U \setminus \{c\}$ mit $z_n \to c$;*
*ii-bis) Für jede Umgebung $V \subset U$ von $c$ ist das Bild $f(V \setminus \{c\})$ dicht in $\mathbb{C}$;*
*iii) Es ist $a_n \neq 0$ für unendliche viele $n < 0$, d.h. der Hauptteil von $L(z)$ ist unendlich.*

**Definition 8.** Der Koeffizient $a_{-1}$ der Laurentreihe von $f$ heißt das *Residuum* von $f$ in $c$: $\mathrm{Res}_c(f) := a_{-1}$.

**Lemma 9.** *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f, g \in \mathcal{O}(U \setminus \{c\})$. Dann gilt:*

- *Ist $f$ holomorph (fortsetzbar) in $c$, so ist $\mathrm{Res}_c(f) = 0$.*
- $\mathrm{Res}_c$ *ist $\mathbb{C}$-linear:* $\mathrm{Res}_c(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \mathrm{Res}_c(f) + b \cdot \mathrm{Res}_c(g)$ *for $a, b \in \mathbb{C}$.*
- *(Transformationregel) Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in V$, $h : U \to V$ holomorph mit $h(c) = \gamma$, $h'(c) \neq 0$. So folgt:* $\mathrm{Res}_c f = \mathrm{Res}_\gamma((f \circ h) \cdot h')$

**Lemma 10.** *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $m \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{M}(U)$, $g \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt:*

- *Besitz $f$ in $c$ einen Pol $m$-ter Ordnung, so gilt*
$$\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to c} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-c)^m f(z))$$
- *Besitz $f$ in $c$ einen Pol erster Ordnung, so gilt* $\mathrm{Res}_c(g \cdot f) = g(c) \cdot \mathrm{Res}_c(f)$.
- *Besitz $f$ in $c$ eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt* $\mathrm{Res}_c\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{g(c)}{f'(c)}$.

## 3 Nullstellen und isolierte Singularitäten im Punkt $\infty$

Sei $f : R_{r,\infty}(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $f^* : R_{0,\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}, w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$. Man klassifiziert die Nullstellen und die isolierten Singularitäten von $f$ im Punkt $\infty$, wie die entsprechenden Nullstellen und isolierten Singularitäten von $f^*$ im Nullpunkt.

- Nach dem Transformationregel mit $h(z) = \frac{1}{z}$ gilt $\mathrm{Res}_\infty f(z)) = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{1}{z^2} \cdot f(\frac{1}{z})\right)$.
- Eine im Punkt $\infty$ holomorphe Funktion kann dort ein nicht verschwindendes Residuum besitzen, z.B. $\mathrm{Res}_\infty \frac{1}{z} = -1$.

## 4 Die Ordnungsfunktion

**Definition 11.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{M}(U)$. Sei $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die Laurentriehe von $f$ um $c \in U$, so definiert man die *Ordnung* von $f$ in $c$ durch
$$\mathrm{ord}_c f = \begin{cases} m & \text{falls } a_m \neq 0 \text{ und } L(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^n \\ \infty & \text{falls } L(z) = 0, \text{ also } a_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

*Anmerkung:* $f$ hat in $c$ eine Polstelle der Ordnung $k \iff \mathrm{ord}_c(f) = -k < 0$.

**Lemma 12** (Rechenregeln). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Dann*
$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_c(fg) &= \mathrm{ord}_c(f) + \mathrm{ord}_c(g)\,, \\ \mathrm{ord}_c\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathrm{ord}_c(f) - \mathrm{ord}_c(g) \qquad \textit{falls } g \textit{ nicht lokal um } c \textit{ verschwindet} \\ \mathrm{ord}_c(f \pm g) &\geq \min(\mathrm{ord}_c(f), \mathrm{ord}_c(g))\,, \qquad \text{“=” } \textit{wenn } \mathrm{ord}_c(f) \neq \mathrm{ord}_c(g) \end{aligned}$$

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript FT 3.*

## 1 Die Indexfunktion

Sei $\gamma$ ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$.

**Definition 1.** Für $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ wird die *Index* (oder *Umlaufzahl*) von $\gamma$ um $z$ definiert als

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi \,,$$

und die Funktion $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ heißt *Indexfunktion.*
Weiter definiert man das *Innere* von $\gamma$ als $\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$.
Zwei geschlossene Wege $\alpha$ und $\beta$ in $U$ heißen *homolog* in $U$, falls $\mathrm{ind}_\alpha f(z) = \mathrm{ind}_\beta f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Insbesondere heißt der Weg $\gamma$ *nullhomologer Weg* in $U$, falls gilt: $\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq U$.

• Die Indexfunktion $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C}$ nimmt nur ganzzahlige Werte an, ist stetig und somit auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant.

• Die ganze Zahl $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$ gibt an, wie oft der Weg $\gamma$ den Punkt $z_0$ umläuft. Dabei zeigt ein negativer Wert an, dass der Punkt im Uhrzeigersinn (d.h. im mathematisch negativen Sinn) umlaufen wird.

## 2 Cauchycher Integralsatz und Cauchysche Integralformel

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion

**Satz 2** (Sätze von Goursat und Morera)**.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
*i) $f$ ist holomorph in $U$;*
*ii) Für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subseteq U$ gelte $\oint_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0$.*

Die Implikation $i) \Rightarrow ii)$ heißt Satz von Goursat und $ii) \Rightarrow i)$ heißt Satz von Morera.

**Satz 3** (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
*i) $f$ ist holomorph auf $U$;*
*ii) Für jeden in u nullhomologer Weg gilt $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$.*
*ii) Für je zwei in u homologe geschlossene Wege $\alpha$ und $\beta$ gilt $\int_\alpha f(z)\ dz = \int_\beta f(z)\ dz$.*

Unter dem Cauchyschen Integralsatz im engeren Sinn versteht man die Implikation $i) \Rightarrow ii)$. Die entgegengesetzte Richtung $ii) \Rightarrow i)$ wird auch manchmal Satz von Morera genannt.

**Satz 4** (Cauchysche Integralformel)**.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
*i) $f$ ist holomorph auf $U$;*
*ii) Für jeden in $U$ nullhomologer Weg $\gamma$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{k+1}} d\xi \,, \quad w \in U \setminus |\gamma| \,.$$

*Bemerkung* 5 (Stetigkeit am Rand -Version der Integralsätze)**.** Die Aussagen der Sätze 3 und 4 gelten bereits, wenn $\gamma$ ein eifach geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $f : \overline{\mathrm{Int}(\gamma)} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist, die auf dem Gebiet $\mathrm{Int}(\gamma)$ holomorph ist.

Bereits unter dieser schwächeren Voraussetzung erhalten wir somit die Gleichungen:
i) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ und ii) $\mathrm{ind}_\gamma(w) \cdot f^{(k)}(w) = \dfrac{k!}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^{k+1}} d\xi$ für $w \in U \setminus |\gamma|$ und $k \in \mathbb{N}$.

# 3 Der Residuensatz

**Satz 6** (Residuensatz). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma$ ein nullhomologer Weg in $U$. Sei $A$ eine diskrete Teilmenge von $U$ mit $A \cap |\gamma| = \emptyset$. Ferner sei $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{c \in A \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{ind}_\gamma(c) \cdot \operatorname{Res}_c f$$

**Satz 7** (über die Residuensumme). *Seien $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, und sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_i} f + \operatorname{Res}_\infty f = 0\,.$$

# 4 Logarithmen und Wurzeln

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$.

**Definition 8.** Eine holomorphe Funktion $l \in \mathcal{O}(G)$ heißt *(holomorpher) Logarithmus* von $f$, falls gilt $\exp(l(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$.

**Lemma 9.** *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ eine holomorphe Funktion, so dass auf dem Bildgebiet $f(G)$ ein Zweig des Logarithmus existiert. Dann besitzt $f$ einen holomorphen Logarithmus $l \in \mathcal{O}(G)$.*

• Falls ein Logarithmus $l \in \mathcal{O}(G)$ von $f$ existiert, dann ist $f(z)$ nullstellenfrei, wegen $f(z) = \exp(l(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$.

• Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei, und sei $l \in \mathcal{O}(G)$ ein Logarithmus von $f$, dann ist $l'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

**Satz 10** (Existenzkriterium einer Logarithmusfunktion). *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei. Auf $G$ existiert genau dann eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $f$, wenn die Funktion $\frac{f'}{f}$ auf $G$ integrabel ist, d.h. $\int_\gamma \frac{f'}{f} dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset G$.*

**Definition 11.** Für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ heißt eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$ eine *(holomorphe) $k$-te Wurzel* von $f$, falls gilt $(g(z))^k = f(z)$ für alle $z \in G$.

**Lemma 12.** *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht identisch 0, und $z_0 \in G$ eine Nullstelle von $f$. Existiere eine holomorphe $k$-te Wurzel vom $f$, so gilt $k \mid \operatorname{ord}_{z_0}(f)$.*

# 5 Der Argumentensatz

Integralen der Form $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ kommen auch beim Zählen von Null- und Polstellen vor:

**Satz 13** (Argumentensatz, Null- und Polstellen zählende Integra). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $\gamma$ ein einfach geschlossener, in $U$ nullhomologer und positiv orientierter Weg in $U$. Weiter sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf $U$, so dass auf $|\gamma|$ weder Null- noch Polstellen von $f$ liegen. Bezeichne $P$ die Polstellenmenge und $N$ die Nullstellenmenge von $f$, so ist die Menge $M := (P \cup N) \cap \operatorname{Int}(\gamma)$ endlich und es gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{c \in M} \operatorname{ord}_c(f) = \textit{(Anzahl* der Nullstellen von } f\textit{) - (Anzahl* der Polstellen von } f\textit{)}$$

*(*) in $\operatorname{Int}(\gamma)$ und jeweils gemäß mit Vilefachheiten gezählt.*

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript FT 4.*

## 1 Holomorphie und Integrabilität

Sei $U$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(U)$. $F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von $f$, falls $F' = f$ gilt.

**Satz 1.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*a) $f$ ist integrabel in $U$, besitzt also eine Stammfunktion.*

*b) Für jeden geschlossenen Weg $\gamma$ in $U$ gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Will man zeigen, dass keine Stammfunktion existiert, so braucht man nur einen geschlossenen Weg $\alpha$ mit $\int_\alpha f(z)dz \neq 0$ anzugeben.

**Definition 2.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrabel* in $U$, wenn jeder Punkt $c \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ besitzt, so dass $f_{|V}$ integrabel in $V$ ist, also eine Stammfunktion in $V$ besitzt.

**Satz 3.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

*a) $f$ ist holomorph in $U$;*

*b) $f$ ist lokal integrabel in $U$.*

*Sei zusätzlich $U$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, so gilt die Äquivalenz folgender zwei Aussagen:*

*a) $f$ ist holomorph in $U$;*

*b) $f$ ist integrabel in $U$.*

## 2 Uneigentliche Integrale

Im Folgenden liegt immer das Riemann-Integral zugrunde.

**Definition 4.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Ist $I = [a, \infty)$ und existiert $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_a^R f(x)dx$ $(\in \mathbb{R})$, dann ist $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ als dieser Grenzwert definiert (man nennt man $f$ *uneigentlich integrierbar* über $[a, \infty)$).

2) Ist $I = (-\infty, b]$ und existiert $\lim\limits_{R\to-\infty} \displaystyle\int_R^b f(x)dx$ $(\in \mathbb{R})$, dann ist $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ als dieser Grenzwert definiert (man nennt man $f$ *uneigentlich integrierbar* über $(-\infty, b]$).

3) Ist $I = (-\infty, \infty)$ und existiert $\lim\limits_{a\to-\infty} \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dann ist $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$ als den Grenzwert definiert (man nennt man $f$ *uneigentlich integrierbar* über $\mathbb{R}$).

Der folgende Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines uneigentlichen Integrals.

**Satz 5.** *Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ($a \in \mathbb{R}$), und es gebe eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_a^R |f(x)|dx \leq M \qquad \textit{für alle} \qquad R \geq a\,.$$

*Dann existieren die uneigentlichen Integrale*

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad \textit{und} \qquad \int_a^\infty |f(x)|dx\,.$$

*Bemerkung* 6. Der vorangegangene Satz liefert nur ein hinreichendes Kriterium.
Es kann passieren, dass das uneigentliche Integral über $f$ existiert, nicht jedoch das über $|f|$.
*Bemerkung* 7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, so gilt für alle $R \geq 0$

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 0\,.$$

Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ muss aber nicht existieren, wie man am Beispiel $f(x) = x$ sehen kann.

**Satz 8** (Existenzkriterien)**.** *Sei $J$ ein unbeschränktes Intervall der Form $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ oder $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), weiter sei $f : J \to \mathbb{C}$ stetig.*

- *Kriterium 1: Gibt es ein $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$, so dass $t \mapsto t^k \cdot |f(t)|$ auf $J$ beschränkt ist, dann existiert das Integral $\displaystyle\int_J f(t)dt$.*
- *Kriterium 2: Sei $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*
  *Ist $|f| \leq g$ auf $J$ und existiert $\displaystyle\int_J g(t)dt$, so existiert das Integral $\displaystyle\int_J f(t)dt$.*

**Standard-Abschätzung:** Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg in $\mathbb{C}$, $f$ eine auf $|\gamma|$ stetige Funktion und bezeichne $L(\gamma)$ die Länge von $\gamma$. Dann gilt:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)|\,.$$

## 3 Berechnung spezieller Integrale

**Typ 1:** $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, wo $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ mit $P, Q$ Polynomen. Dabei gilt $Q(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$.
Integrale dieser Form lassen sich mit der Substitution $z = e^{it}$ in ein Kreisintegral einer komplex-rationalen Funktion $\tilde{R}(z)$ einer Variablen überführen. Dieses ist dann i.A. leicht mithilfe des Residuensatz auswertbar.

**Typ 2:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}dx$, wo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ist und $P(x), Q(x)$ Polynomen sind, mit $Q$ nullstellenfrei auf $\mathbb{R}$.
Nach der eulerschen Formel ist $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x)dx = \mathrm{Re}\left(\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}dx\right)$ und $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x)dx = \mathrm{Im}\left(\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}dx\right)$, weswegen wir uns auf den Integraltyp $\int_I \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}dx$ beschränken.

**Typ 2a:** $\deg Q(x) \geq 2 + \deg P(x)$**.** Sei $R$ so groß gewählt, dass alle Singularitäten von $f(z) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ in $B_R(0)$ liegen. *Ansatz:* Das Integral von $f(z)$ auf dem Weg $\gamma_R = [-R, R] \oplus \beta_R$ ($\beta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$) lässt sich mit dem Residuensatz ausrechnen, und mit der Standard-Abschätzung kann man den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)dz = 0$ überprüfen.

**Typ 2b:** $\deg Q(x) = 1 + \deg P(x)$. Hier wählt man normalerweise den Rand eines Rechtecks als Integrationsweg, und zwar der Rechteck mit Eckpunkten $R, R + iR, -R + iR, -R$.

# Staatsexamenskurs Analysis LA (vertieft)

*Skript FT 5.*

## 1 Konforme Abbildungen

**Definition 1.** Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Abbildung $f : U \to V$ heißt *biholomorph*, falls $f$ bijektiv und auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ holomorph ist.

**Satz 2.** *Seien $U, V$ offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Die Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn sie holomorph und bijektiv ist.*

**Definition 3.** Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine reell differenzierbare und in jedem Punkt von $U$ winkel- und orientierungstreue bijektive Abbildung $f : U \to V$ heißt *konform*.

**Satz 4.** *Die konforme Abbildungen sind genau die biholomorphe Abbildungen.*

## 2 Riemannscher Abbildungssatz

**Satz 5** (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Sei $G$ ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E} := \{|z| < 1\}$.*
*Sei zusätzlich $p \in G$, dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(p) = 0$ und $\varphi'(p) \in (0, \infty)$.*

*Bemerkung* 6. i) Auf die Voraussetzung $G \neq \mathbb{C}$ im Satz kann nicht verzichtet werden, weil jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ konstant ist (Satz von Liouville), und damit nicht konform.
ii) Da der einfache Zusammenhang eine topologische Invariante ist, ist auch die Umkehrung des Riemannschen Abbildungssatz richtig:
*Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Menge $U$ ist genau dann bijektiv auf $\mathbb{E}$ abbildbar, wenn $U$ ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist.*

## 3 Schwarzes Lemma

**Satz 7** (Schwarzes Lemma)**.** *Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.*
*Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$.*
*Gelte zusätzlich $|f'(0)| = 1$ oder $|f(c)| = |c|$ für ein $c \in \mathbb{E}, c \neq 0$, dann ist $f$ eine Drehung, d.h. $f(z) = \alpha \cdot z$ für ein $\alpha \in \partial\mathbb{E}$.*

## 4 Möbiustransformationen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, so heißt die rationale Funktion $f : z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ *gebrochene lineare Transformation* oder *Möbiustransformation*.

#### $f$ als konforme Abbildung in $\mathbb{C}$.

Fall C1, $c = 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ist konform mit Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{d}{a}z - \frac{b}{a}$.
Fall C2, $c \neq 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist konform mit Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$.

**$f$ als konforme Abbildung in $\mathbb{P}$** Bezeichne $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlensphäre. Die Abbildung $f$ wird nun zu einer konformen Abbildung $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ erweitert, indem die Punkte $\infty$ und $-\frac{d}{c}$ in die Definitionsmenge aufgenommen werden.

Fall P1, $c = 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ist konform mit $f(\infty) = \infty$. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{d}{a}z - \frac{b}{a}$, $f^{-1}(\infty) = \infty$

Fall P2, $c \neq 0$: Die Möbiustransformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ist konform mit $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ und $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{P} z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$ mit $f(\frac{a}{c}) = \infty$ und $f(\infty) = -\frac{d}{c}$.

**Beispiel 8.** Die Cayleyabbildung $\varphi : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ bildet die komplexe obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ auf die Einheitskreis $\mathbb{E} := \{|z| < 1\}$ konform ab.

Die Umkehrabbildung ist $\varphi^{-1} : z \mapsto i \cdot \dfrac{z+1}{-z+1}$. Man kann sie bestimmen, indem man die Abbildung $\varphi$ zur komplexen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$ schreibt. Dann ist die Umkehrabbildung gegeben durch die Möbiustransformation zur inversen Matrix.

**Satz 9** (Kreisverwandtschaft)**.** *Jede gebrochene lineare Transformation $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ führt Kreislinie in $\mathbb{P}$ wieder in Kreislinie in $\mathbb{P}$ über.*

*Man beacht, dass es 2 Arten von Kreislinien $K$ in $\mathbb{P}$ gibt:*
*1.Art: $\infty \notin K$. Dann handelt es sich um eine Kreislinie in $\mathbb{C}$.*
*2.Art: $\infty \in K$. Dann entspricht dieser Kreislinie $K$ einer Geraden in $\mathbb{C}$.*

## 4.1 Übersicht der wichtigsten Automorphismengruppen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}\ \mathbb{P} &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, ad - bc \neq 0 \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{C} &= \{ z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{H} &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, ad - bc = 1 \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{E} &= \left\{ z \mapsto a\frac{z-u}{\bar{u}z-1} \mid a \in \partial\mathbb{E}\,, u \in \mathbb{E} \right\} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{C}^* &= \{ z \mapsto a \cdot z \mid a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \cup \{ z \mapsto a \cdot z^{-1} \mid a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \} \\
\mathrm{Aut}\ \mathbb{E}^* &= \{ z \mapsto a \cdot z \mid a \in \partial\mathbb{E} \}
\end{aligned}$$